C.E.C.S.A.

MATEMATICAS

SEGUNDO CURSO

CARDENAS · CURIEL · LLUIS
PERALTA · TAVERA · VILLAR

C.E.C.S.A.

MATEMATICAS

Segundo Curso

Educación Media Básica

Este texto ha sido redactado para satisfacer cualquiera de las dos estructuras programáticas: Areas - Asignaturas

SEP

CNIE

Este libro fue editado bajo convenio:
Secretaría de Educación Pública - Cámara Nacional
De la Industria Editorial y aprobado por
el Consejo Nacional Técnico de la Educación

MATEMATICAS

Segundo Curso

Educación Media Básica

Dr. HUMBERTO CARDENAS TRIGOS
Instituto de Matemáticas, U.N.A.M.
Profr. MIGUEL ANGEL RAFAEL CURIEL ARIZA
Escuela Normal Superior, México
Dr. EMILIO LLUIS RIERA
Instituto de Matemáticas, U.N.A.M.
Profr. FIDEL PERALTA CORONA
Escuela Normal Superior, México
Profr. CUAUHTEMOC TAVERA GUERRERO
Escuela Normal Superior, México
Profr: ELIAS VILLAR QUIJANO
Escuela Normal Superior, México

COMPAÑIA EDITORIAL CONTINENTAL, S. A., MEXICO
DISTRIBUIDORES:
ESPAÑA–ARGENTINA–CHILE–VENEZUELA–COLOMBIA–PERU
Bolivia — Brasil — Costa Rica — Dominicana — Ecuador — El Salvador — Estados Unidos
Guatemala — Honduras — Nicaragua — Panamá — Paraguay — Portugal — Puerto Rico
Uruguay

Edición autorizada bajo contrato con los autores

Quinta impresión:
septiembre de 1980

COMPAÑIA EDITORIAL CONTINENTAL, S. A.
CALZ. DE TLALPAN NÚM. 4620, MÉXICO 22, D. F.

MIEMBRO DE LA CAMARA NACIONAL DE LA INDUSTRIA EDITORIAL
Registro Núm. 43

DISTRIBUIDORES PRINCIPALES EN:

CAVANILES NÚM. 52, MADRID 7, ESPAÑA
AV. CANNING NÚMS. 96, 98 Y 100, ESQ. PADILLA
1414, BUENOS AIRES, ARGENTINA
AMUNÁTEGUI NÚM. 458, SANTIAGO DE CHILE, CHILE
VEN-LEE C. A., AV. FUERZAS ARMADAS, ESQ. SAN MIGUEL
EDIF. RODRIMER, PISO 6, CARACAS, VENEZUELA
CALLE DFL CHORRO DE EGIPTO (ONCE) NÚM. 2-56,
BOGOTÁ, COLOMBIA
AV. REP. DE PANAMÁ NÚM. 2199, LA VICTORIA–LIMA 13, PERÚ

IMPRESO EN MEXICO PRINTED IN MEXICO

PROLOGO

El presente libro, que se pone a disposición del maestro y el alumno de matemáticas en el segundo grado de educación media básica, desarrolla ampliamente, tanto en contenido como en orden, el programa oficial vigente a partir de septiembre de 1976.

Aunque las ocho unidades que forman el texto se presentan en el orden que señala el programa, se ha procurado que cada una tenga la suficiente independencia de las demás para que el maestro pueda organizar su estudio en el orden más conveniente, de acuerdo con su propio criterio o de acuerdo con los intereses de los alumnos.

Toda obra humana es perfectible, y más tratándose de un libro de texto que debe actualizarse continuamente. Esperamos que las sugerencias de los maestros, emanadas de su experiencia docente, nos ayuden a mejorar la presente obra en beneficio de nuestros educandos.

LOS AUTORES

Indice de Materias

PRIMERA UNIDAD

LOGICA Y CONJUNTO

SEGUNDA UNIDAD

LOS NUMEROS RACIONALES

TERCERA UNIDAD

POLINOMIOS

CUARTA UNIDAD

FUNCIONES

QUINTA UNIDAD

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

SEXTA UNIDAD

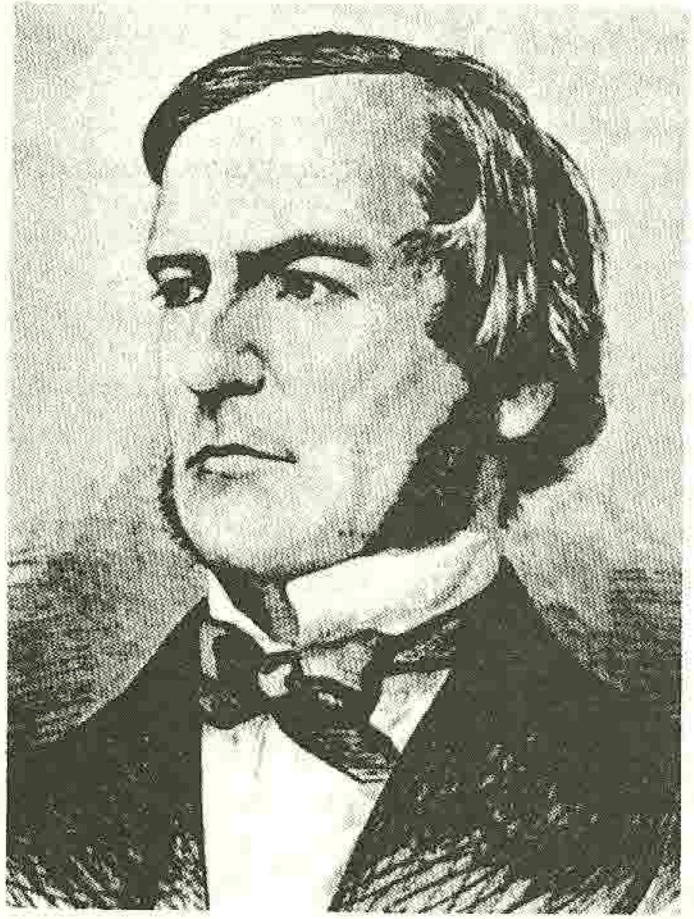
SISTEMAS DE ECUACIONES

SEPTIMA UNIDAD

GEOMETRIA PLANA

OCTAVA UNIDAD

ESTADISTICA Y PROBABILIDAD



El matemático inglés George Boole creó un álgebra para la lógica. iniciando así una nueva época en el estudio de esta disciplina

PRIMERA UNIDAD

LOGICA Y CONJUNTO

OBJETIVOS PARTICULARES

Al concluir el estudio de esta unidad, el alumno:

I. Podrá interpretar adecuadamente proposiciones compuestas utilizando la negación, la conjunción y la disyunción.
II. Relacionará los conceptos de lógica con el manejo de conjuntos y con algunas situaciones matemáticas concretas.

1. PROPOSICIONES

Al establecer comunicación con sus compañeros, con sus maestros y con las personas que lo rodean, usted hace uso de enunciados. Algunos de estos enunciados son como los siguientes:

1. Marte es un planeta del sistema solar.
2. Napoleón fue emperador de Francia.
3. Una molécula de agua está formada por dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno.
4. $3 + 4 = 7$.
5. El autor de "Crimen y Castigo" es William Shakespeare.
6. Benito Juárez nació en el estado de Chihuahua.
7. El protón tiene carga negativa.
8. $6 + 5 > 11 + 12$.

En cada uno de estos enunciados, que en la clase de Español se denominan oraciones declarativas, se está afirmando algo sobre algo y en cada caso podemos indicar si esa afirmación es verdadera o falsa.

Por ejemplo, los enunciados 1. a 4. son verdaderos, en cambio los enunciados 5. a 8. son falsos.

A enunciados como los anteriores de los que podemos decir que son falsos o verdaderos, se les llama *proposiciones*.

Ejercicio 1. De los siguientes enunciados indique cuáles son proposiciones.

a) ¿Adónde va usted?
b) El agua se congela a 0° centígrados.
c) Quisiera que hubiera vacaciones.
d) Todos los números pares se pueden dividir entre 2.
e) $8 > 5 + 3$.
f) Si $r = 2$, entonces $2r + 5 = 9$.
g) ¡Maldita sea mi suerte!
h) ¡Alto!
i) Mañana es probable que llueva.
j) Me gusta el café con leche.

Ejercicio 2. De las siguientes proposiciones diga cuáles son verdaderas y cuáles falsas.

a) Al cloruro de sodio se le llama también sal.
b) México es una república representativa y democrática.
c) Todo número racional también es natural.
d) El cero es un número natural.
e) $(3 + 18)^2 = 441$.
f) Si $x + 17 = 38.5$, entonces $x = 21.5$.
g) Si $m = 6$, entonces $m^2 + 3m - 7 = 47$.
h) $\dfrac{4\,726}{5} < 190 \times 5$.
i) Todo número natural también es racional.
j) Algunos números racionales son naturales.

Ejercicio 3. Señale si las siguientes afirmaciones son verdaderas o no. Fundamente sus respuestas.

a) El es libertador de Venezuela.
b) Ella es la descubridora del radium.
c) x es un número primo.
d) $x + 1 = 15$.
e) $5x^2 + 3x - 2 = 0$.

En todos los incisos del ejercicio anterior observamos que de ninguna de las afirmaciones se puede decir que sea verdadera o falsa. Por lo tanto, no son proposiciones.

Sin embargo, esas mismas expresiones serían proposiciones simplemente sustituyendo las palabras "El", "Ella" y "x" adecuadamente. Ejemplo.

1) José Martí es libertador de Venezuela.
2) María Curie es la descubridora del radio.
3) 10 es un número primo.

A expresiones como las del Ejercicio 3 se les llama *proposiciones abiertas*.

Ejercicio 4. De las siguientes expresiones, indique cuáles son proposiciones abiertas y cuáles son simplemente proposiciones.

a) El es un matemático francés del siglo XIX.
b) Si $x = 3$, entonces $x^2 + 5 = 14$.
c) Ellos son el grupo más numeroso de la Secundaria 91.
d) La raíz cuadrada del número n es 37.5.
e) $x > .05$.
f) El cloruro de sodio no es soluble en agua.
g) El H_2O es comestible.
h) $3x + 2x + 5x = 10x$ si x es un número real.
i) Este libro tiene 400 páginas.
j) Como a es un número natural, entonces,
$a(5 + 3) = 5a + 3a$.

Ejercicio 5. Sustituya las palabras o símbolos necesarios en las proposiciones abiertas anteriores, de manera que se obtengan proposiciones ciertas.

2. NEGACION DE UNA PROPOSICION

Nicolás Copérnico, eminente astrónomo polaco publicó en 1543 una obra, "Sobre las revoluciones de los orbes terrestres", que cambió radicalmente la visión que los hombres tenían del universo que los rodeaba. Anteriormente a él, se pensaba que la Tierra estaba fija en el espacio y que el Sol, la Luna y las estrellas, giraban alrededor de ella.

La idea popular sobre la doctrina de Copérnico se concentraba en la proposición "La Tierra se mueve alrededor del Sol". Los partidarios de Copérnico afirmaban la verdad de esta proposición y sus enemigos señalaban su falsedad sosteniendo que la proposición "La Tierra *no* se mueve alrededor del Sol" era verdadera.

La polémica alrededor de estas dos proposiciones marcó un momento culminante en la historia de la ciencia y las ideas progresistas.

En la ciencia, la técnica y aun en la vida diaria se discuten frecuentemente parejas de proposiciones como las que hemos comentado y que se caracterizan de la siguiente manera: *si una de ellas es falsa la otra es verdadera, y viceversa.*

Ejemplo.

Si la proposición "La Tierra se mueve alrededor del Sol" es verdadera, entonces, la proposición "La Tierra *no* se mueve alrededor del Sol" es falsa, y también, si "La Tierra se mueve alrededor del Sol" es una proposición falsa entonces se debe considerar que la proposición "La Tierra no se mueve alrededor del Sol" es verdadera.

Al tener dos proposiciones como las que estamos tratando se acostumbra decir que *una es la negación de la otra.*

Conocida una proposición, a veces es necesario construir otra proposición que sea su negación. Observe, en los ejemplos siguientes, cómo se puede construir la negación de una proposición dada.

PROPOSICION	NEGACION
"La Tierra se mueve alrededor del Sol."	"*Es falso que* la Tierra se mueva alrededor del Sol." "*No es verdad* que la Tierra se mueva alrededor del Sol." "La Tierra *no* se mueve alrededor del Sol."
"París no es la capital de Francia".	"París es la capital de Francia." "Es falso que París no es la capital de Francia." "No es verdad que París no es la capital de Francia."
$2 + 2 = 5$	$2 + 2 \neq 5$. "Es falso que $2 + 2 = 5$." "No es verdad que $2 + 2 = 5$."

Al construir la negación de una proposición se pueden cometer errores como el del siguiente ejemplo.

PROPOSICION	NEGACION (?)
El caballo es blanco.	El caballo es negro.

La negación de la proposición "El caballo es blanco", puede ser cualquiera de las siguientes proposiciones: "El caballo no es blanco", "Es falso que el caballo sea blanco" o "No es verdad que el caballo sea blanco", y éstas no significan lo mismo que "El caballo es negro". Esto resulta claro si consideramos, por ejemplo, que si es verdad que "El caballo no es blanco" esto no significa que el caballo sea necesariamente negro, pues puede ser ruano, café, etc. y "no ser blanco".

Ejercicio 6. Construya, en la línea que sigue a cada proposición, la negación correspondiente.

(Señale al menos dos formas de esa negación).

a) La capital de Dinamarca es Copenhague.

b) El símbolo del sodio es Na.

c) En el núcleo de un átomo hay protones y neutrones.

d) Las esponjas son plantas acuáticas.

e) Los artrópodos son el grupo de animales menos numeroso.

f) La falta de vitamina A no produce ceguera nocturna.

g) México no es una república federal.

h) El número atómico del carbono es 6.

i) No es verdad que Lavoisier haya establecido la ley de conservación de la materia.

j) Es falso que la Luna sea satélite de la Tierra.

k) $14 + 9 = 18$.

l) $\frac{18}{3} + \frac{3}{9} \neq \frac{57}{9}$.

m) $87 > 15$.

Ejercicio 7. En el ejercicio anterior determine si las proposiciones dadas y las que usted encontró son verdaderas o falsas. Complete la siguiente expresión: Si una proposición es verdadera, entonces su negación es ____________. Si por el contrario, la proposición es falsa, entonces su negación es ____________.

Ejercicio 8. Escriba usted la negación de cada una de las proposiciones dadas. (Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y con el maestro.)

a) Todos los números naturales son números racionales.

b) Nada es verdad.

c) Algunos números impares son primos.

d) Ningún planeta tiene vida.

e) Nadie me ha llamado la atención.

____

____

Notación

En el estudio y el manejo de muchos conceptos matemáticos resulta útil y cómodo el empleo de símbolos breves.

A proposiciones como las que estamos estudiando ahora, se acostumbra representarlas también con letras minúsculas del alfabeto castellano. Por ejemplo, a la proposición: "Marte es un planeta del sistema solar" le podemos asignar la letra p. Y expresamos esto con la siguiente igualdad:

$$\boxed{p = \text{Marte es un planeta del sistema solar.}}$$

Ahora bien, si tenemos una proposición representada con una letra y formamos su negación, a esta última la denotaremos con la misma letra precedida del símbolo ($\sim$).

Ejemplo.

p = Marte es un planeta del sistema solar.
$\sim p$ = Marte *no* es un planeta del sistema solar.

Ejemplo.

q = El protón tiene carga negativa.
$\sim q$ = Es falso que el protón tenga carga negativa.

Ejemplo.

$r = 8 + 17 = 25.$

$\sim r$ = Es falso que $8 + 17 = 25$.

Ejercicio 9. En cada inciso complete las igualdades.

a) m = Sócrates fue un filósofo griego.

$\sim m$ = ______________________________

b) s = Las ballenas no son mamíferos.

$\sim s$ = ______________________________

c) t = Todo número par es divisible entre 2.

$\sim t$ = ______________________________

d) u = La República Mexicana tiene 31 estados.

$\sim u$ = ______________________________

e) i = Hernán Cortés fue el conquistador de México.

$\sim i$ = ______________________________

Si tenemos una proposición abierta, podemos también formar su negación, y denotar a ambas con el simbolismo que ya conocemos.

Ejemplo.

Si $p = x$ es un número par, entonces,
$\sim p = x$ *no* es un número par.
Si $a = x$ es mexicano, entonces,
$\sim a = x$ no es mexicano.

Ejercicio 10. Escriba la negación de la proposición abierta dada en cada inciso.

a) $p = x$ es un número natural mayor que 10.

$\sim p$ = ______________________________

b) $v = x$ es un planeta del sistema solar.

$\sim v$ = ______________________________

c) $w = n$ es un número tal que $n \cdot 5 = 40$.

$\sim w$ = ______________________________

d) $z = x5.$

$\sim z$ = ______________________________

e) $u = m\ 0.$

$\sim u$ = ______________________________

f) $c = x\ 10.$

$\sim c$ = ______________________________

g) $d = \frac{x}{5} = 125.$

$\sim d$ = ______________________________

h) $e = x$ fue un presidente mexicano.

$\sim e$ = ______________________________

i) $f = x$ es un número primo.

$\sim f$ = ______________________________

j) $g = x$ es un número múltiplo de 8.

$\sim g =$ ________________________________

k) $h = x$ es un divisor de 350.

$\sim h =$ ________________________________

l) $k = x$ es una de las partes de la Biblia.

$\sim k =$ ________________________________

Ejercicio 11. En cada inciso del ejercicio 10, señale 5 objetos que hagan verdadera la proposición abierta y otros 5 objetos que hagan verdadera su negación.

3. PROPOSICIONES ABIERTAS Y CONJUNTOS

Desde la escuela primaria usted ha manejado y descrito conjuntos. En esta unidad veremos cómo las proposiciones abiertas sirven también para determinar conjuntos.

No es necesario meditar mucho para ver que

> Si se nos da una proposición abierta, todos los objetos que hacen verdadera esa proposición forman un conjunto.

Por eso es factible describir un conjunto por medio de una proposición abierta.

Ejemplo. Consideremos la siguiente proposición abierta:

"x es un planeta interior del Sistema Solar"

Los objetos que hacen verdadera esta proposición son los planetas Mercurio, Venus, Tierra y Marte. De manera que si pensamos en el conjunto p formado por estos cuatro planetas, podemos describirlo de la siguiente manera:

$$P = \{x \text{ es un planeta interior del Sistema Solar}\}$$

Con esta notación indicamos que el conjunto P está formado por todos aquellos objetos que hacen cierta la proposición "x es un planeta interior del Sistema Solar".

De igual manera, con la expresión

$$R = \{x \text{ es un número natural menor que } 10\}$$

indicamos que los elementos del conjunto R son todos aquellos objetos que hacen cierta la proposición que está dentro de los corchetes. Esto es, los elementos del conjunto R son los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Ejercicio 11a. En cada inciso señale cuáles son los elementos del conjunto que se indica.

a) $A = \{x \text{ es una vocal}\}$

b) $B = \{x > 5\}$

c) $C = \{x < 8\}$

d) $D = \{x^2 = 25\}$

e) $E = \{x + 5 = 70\}$

f) $F = \{x \text{ es un par}\}$

g) $G = \{x + 2x = 3x\}$

h) $H = \{x \text{ es un estado de la región noroeste de México}\}$

i) $I = \{x \text{ es un estado de la República colindante con Guatemala}\}$

j) $J = \{x \text{ es una materia del segundo grado de Secundaria}\}$

k) $K = \{x \text{ es una estación del año}\}$

l) $L = \{x \text{ es un divisor de } 15\}$

m) $M = \{x \text{ es un divisor de } 90\}$

n) $N = \{x \text{ es un divisor de } 1\}$

o) $O = \{x \text{ es un divisor de cero}\}$

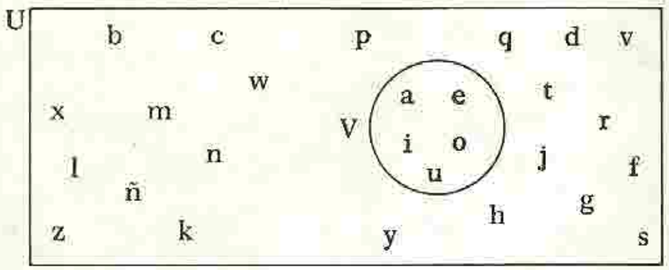
Complemento de un conjunto

Ahora determinaremos un conjunto, a partir de otro dado, utilizando la negación de una proposición.

Ejemplo. Si consideramos que $U = \{x$ es una letra del alfabeto castellano$\}$ es el conjunto universal de la discusión; es decir el conjunto con cuyos elementos podremos formar los demás conjuntos que mencionaremos en nuestro discurso, construiremos, dentro de este universo, el conjunto V siguiente:

$$V = \{x \text{ es una vocal}\}$$

Esta situación puede ilustrarse con el siguiente diagrama de Venn:



Observamos que las letras a, e, i, o, u, hacen verdadera la proposición "x es una vocal" y, por lo tanto, esas letras forman el conjunto V. Las demás letras hacen falsa la proposición dada y, por lo tanto, no pertenecen a V.

La negación de la proposición "x es una vocal" es "x *no* es una vocal", y los objetos de U que la hacen verdadera son los objetos que *no* pertenecen a V. Llamemos V' al conjunto de estos objetos. Así tenemos que

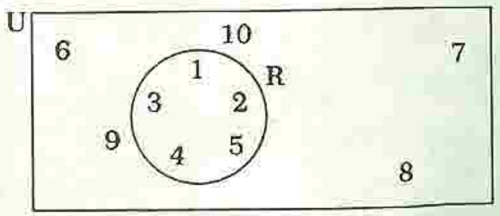
V' = {x no es una vocal}.

A este conjunto se le llama *el complemento de* V.

Veamos ahora otro ejemplo.

U = {x es un número natural menor o igual a 10}

R = {x es un número natural menor o igual a 5}



El conjunto complemento de R estará determinado por *la negación* de la proposición "x es un número natural menor o igual a 5".

R' = {x *no* es un número natural menor o igual a 5} (R' se lee "complemento de R").

Los elementos de R' son los elementos de U que *no* pertenecen a R. Es decir, son los números 6, 7, 8, 9 y 10.

En general,

Si tenemos en un universo U un conjunto cualquiera A, determinado por una proposición p, la proposición $\sim p$ determina otro conjunto A', llamado el complemento de A, y que está formado por todos los elementos que *no* pertenecen a A.

Ejercicio 12. En cada inciso determine el complemento del conjunto dado y haga un diagrama.

a) U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

B = {x es menor que 2}

B' = {   }

(Coloree de rojo el conjunto B')

b) U = {x es un animal}

C = {x es un mamífero}

C' = {   }

(Coloree de rojo el conjunto C')

c) U = {x es un país americano}

D = {x es un país sudamericano}

D' = {   }

(Coloree de rojo el conjunto D')

d) U = {x es un libro de la Biblia}

E = {x es un libro del Nuevo Testamento}

E' = {   }

Ilustre con rojo el conjunto E')

e) U = {x es un número primo}

F = {x es un número par}

F' = {   }

(Ilumine de rojo el conjunto F')

f) $U = \{x \text{ es un número racional}\}$

$G = \{x \text{ es un número natural}\}$

$G' = \{ \qquad\qquad\qquad \}$

(Coloree de rojo el conjunto G')

g) $U = \{x \text{ es una palabra del español}\}$

$H = \{x \text{ es una palabra aguda}\}$

$H' = \{ \qquad\qquad\qquad \}$

(Pinte de rojo el conjunto H')

h) $U = \{x \text{ es un enunciado en español}\}$

$I = \{x \text{ es un enunciado bimembre}\}$

$I' = \{ \qquad\qquad\qquad \}$

(Pinte de rojo el conjunto I')

4. PROPOSICIONES COMPUESTAS

En las matemáticas al igual que en las demás ciencias, los hechos de su estudio se expresan por medio de proposiciones simples como las que hasta aquí hemos estudiado, o bien, por expresiones compuestas de 2 o más proposiciones simples. Dichas expresiones son como las siguientes:

a) *La Tierra es un planeta* $\boxed{y}$ *el Sol es una estrella.*

b) *10 es mayor que 5* $\boxed{\text{o}}$ *10 es menor que 7.*

c) $\boxed{\textit{Si}}$ $x = 5$, $\boxed{\text{entonces}}$ $3x^2 = 75$.

A expresiones como las anteriores, formadas por 2 o más proposiciones unidas por los conectivos "y", "o", "si. . . entonces", se les llama *proposiciones compuestas.*

La proposición compuesta del inciso a) está formada por las proposiciones simples "La Tierra es un planeta" y "El Sol es una estrella"; la proposición b) consta de las proposiciones simples "10 es mayor que 5" y "10 es menor que 7" y por último, la proposición compuesta c) se forma con las proposiciones simples "$x = 5$" y "$3x^2 = 75$".

Una proposición compuesta es verdadera o falsa, *según la verdad o falsedad de las proposiciones que la forman y según el tipo de conectivo que esté uniendo esas proposiciones.*

A continuación estudiaremos cómo determinar si una proposición compuesta es verdadera o falsa.

Conjunción

Cuando unimos dos proposiciones simples por medio del conectivo "y", es que deseamos expresar, con la proposición resultante, nuestra opinión de que ambas son *simultáneamente* verdaderas.

Por ejemplo, con la proposición compuesta "La Tierra es un planeta $\boxed{\text{y}}$ el Sol es una estrella" afirmamos que las dos proposiciones simples son verdaderas al mismo tiempo.

Resulta claro entonces que las proposiciones con conectivo "y" sólo son verdaderas si las dos proposiciones "conectadas" son *efectivamente* verdaderas. Así que basta con que una de las proposiciones que se ligan con el conectivo sea falsa para que la proposición compuesta resulte falsa.

Ejemplo.

a) $\underbrace{\text{La Tierra es un planeta}}_{\text{V}}\ \boxed{\text{y}}\ \underbrace{\text{el Sol es una estrella.}}_{\text{V}}$

La proposición es verdadera, pues las proposiciones que la forman son simultáneamente ciertas.

b) $\underbrace{2 + 2 = 4}_{\text{V}}\ \boxed{\text{y}}\ \underbrace{\text{París es la capital de Dinamarca.}}_{\text{F}}$

La proposición es falsa, pues una de las proposiciones que la forman es falsa.

c) $\underbrace{7 < 2}_{\text{F}}\ \boxed{\text{y}}\ \underbrace{\text{Samuel Morse inventó el telégrafo.}}_{\text{V}}$

La proposición compuesta es falsa. (Diga por qué.)

d) $\underbrace{\text{La estrella de mar es un mamífero}}_{\text{F}}$ y $\underbrace{\text{el caracol también.}}_{\text{F}}$

Esta proposición es falsa, pues las dos proposiciones que la forman son falsas. Cuando se emplean letras para denotar proposiciones, el conectivo "y" suele simbolizarse con $\wedge$.

Ejemplo.

Si p = "$2 + 2 = 4$" y q = "$6 > 2$", entonces,

$$p \wedge q = \text{“}2 + 2 = 4 \quad \text{y} \quad 6 > 2\text{”}.$$

A toda proposición compuesta que se forma con dos proposiciones simples y el conectivo "y" se le da el nombre de *Conjunción.*

Ejercicio 13. Analice las siguientes proposiciones, tal como se hizo con los ejemplos de arriba, y determine si las conjunciones son verdaderas o falsas.

a) $\underbrace{\text{La vitamina C es antirraquítica}}$ y $\underbrace{\text{también la vitamina D.}}$

b) $\underbrace{\text{El hígado de res es rico en hierro}}$ y $\underbrace{\text{el queso contiene calcio.}}$

c) $\underbrace{\text{María Curie descubrió el Radio}}$ y $\underbrace{\text{Cavendish el Uranio.}}$

d) $\underbrace{\text{Alberto Einstein descubrió los satélites de Júpiter}}$ y

$\underbrace{\text{Galileo Galilei inventó la teoría de la relatividad.}}$

e) $\underbrace{\text{La amoeba es un vegetal}}$ y $\underbrace{\text{también lo es la rosa.}}$

f) $\underbrace{3x + 2x = 5x}$ y $\underbrace{18.5 > 16.6.}$

g) $\underbrace{(18)^2 + (5)^2 > 23^2}$ y $\underbrace{\sqrt{627} = 14.}$

h) $\underbrace{\text{Si } a \text{ es un número natural, entonces } 2a \text{ es un impar}}$ y

$\underbrace{\text{si } m \text{ es un número natural, entonces } 2a - 1 \text{ es un par.}}$

i) $\underbrace{\text{Todo número racional es natural}}$ y

$\underbrace{\text{todo número natural es racional.}}$

j) $\underbrace{\text{La capital de Francia es París}}$ y

$\underbrace{\text{la capital de Italia es Amsterdam.}}$

Ejercicio 14. Complete las igualdades en donde sea necesario y luego diga si la conjunción es verdadera o falsa.

a) p = 20 es divisible entre 4.
q = 40 es divisible entre 10.
$p \wedge q$ = ________________

$p \wedge q$ es una conjunción ________________
(Falsa, Verdalera)

b) r = 25 es un múltiplo de 10.
s = 80 es un múltiplo de 5.
$r \wedge s$ = ________________

$r \wedge s$ es una conjunción ________________

c) t = La adición de racionales tiene propiedad conmutativa.
u = La sustracción de naturales tiene propiedad conmutativa.
$t \wedge u$ = ________________

$t \wedge u$ es una conjunción ________________

d) v = Un átomo de oxígeno tiene 8 electrones.
w = El átomo del sodio tiene 15 electrones.
$v \wedge w$ = ________________

$v \wedge w$ = es una conjunción ________________

e) x = Lavoisier estableció la ley de conservación de la materia.
y = Mendeleiev descubrió el Uranio.
$x \wedge y$ = ________________

$x \wedge y$ = es una conjunción ________________

Dos proposiciones abiertas simples, como las que hemos manejado. también se pueden unir para formar una conjunción.

Ejemplo.

$p = x$ es un número entero.
$q = x$ es un número impar.
$p \wedge q = x$ es un número entero y x es un número impar.

Observación. En este ejemplo los objetos que hacen cierta la proposición $p \wedge q$ son los números que *al mismo* tiempo son enteros e impares.

Ejercicio 15. Complete usted las igualdades y las oraciones que se dan.

a) $r = x$ es un número primo.
$s = x$ es un número natural.

$r \wedge s =$ ______________________________

Los objetos que hacen verdadera la proposición $r \wedge s$ son ______________________

b) $m = x$ es un mamífero.
$n = x$ es un animal marino.

$m \wedge n =$ ______________________________

Los objetos que hacen verdadera la proposición $m \wedge n$ son ______________________

c) $a = x$ es un número divisible entre 2.
$b = x$ es un número divisible entre 3.

$a \wedge b =$ ______________________________

Los objetos que hacen verdadera la proposición $a \wedge b$ son ______________________

d) $c = x$ es un número múltiplo de 5.
$d = x$ es un número múltiplo de 4.

$c \wedge d =$ ______________________________

Los objetos que hacen verdadera la proposición $c \wedge d$ son ______________________

e) $f = x$ es una persona que es mexicana.
$g = x$ es una persona que habla inglés.

$f \wedge g =$ ______________________________

Los objetos que hacen verdadera la proposición $f \wedge g$ son ______________________

f) $i = x > 10$.
$j = x < 20$.

$i \wedge j =$ ______________________________

Los objetos que hacen verdadera la proposición $i \wedge j$ son ______________________

g) $k = x \geq 35$.
$l = x \leq 40$.

$k \wedge l =$ ______________________________

Los objetos que hacen verdadera la proposición $k \wedge l$ son ______________________

h) $e = x$ es una palabra grave.
$h = x$ es una palabra aguda.

$e \wedge h =$ ______________________________

Los objetos que hacen verdadera la proposición $e \wedge h$ son ______________________

Conjunción e intersección

Existe una relación entre la conjunción (de proposiciones) y la intersección (de conjuntos). En la siguiente discusión se pone de relieve esa relación.

Consideremos el siguiente conjunto universal:

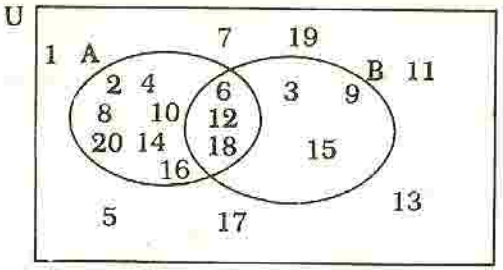
$U = \{x$ es un número natural menor o igual a $20\}$

y formemos los siguientes dos conjuntos:

$A = \{x$ es un múltiplo de $2\}$.

$B = \{x$ es un múltiplo de $3\}$.

Estos tres conjuntos se pueden ilustrar con el siguiente diagrama:



Observamos que los conjuntos A y B están determinados por las proposiciones abiertas "x es un múltiplo de 2" y "x es un múltiplo de 3". Si formamos ahora una conjunción con esas dos proposiciones tendremos la proposición siguiente:

"x es un múltiplo de 2 y x es un múltiplo de 3"

Los únicos elementos de U que hacen cierta la conjunción anterior son los números que son, al mismo tiempo, múltiplos de 2 y de 3; es decir, los números 6, 12 y 18.

Como esos números forman el conjunto $A \cap B$, podemos concluir que la conjunción dada determina la intersección de los conjuntos A y B.

En general,

> Si P y Q son dos conjuntos determinados por las proposiciones abiertas p y q, respectivamente, la conjunción p y q determina el conjunto $P \cap Q$.

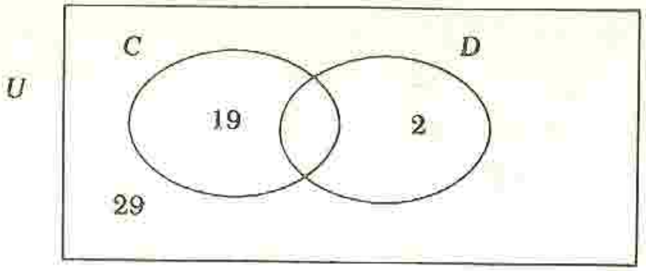
Ejercicio 16. En cada inciso determine la intersección de los conjuntos dados y complete el diagrama.

a) $U = \{x$ es un número natural menor que $31\}$.

$C = \{x$ es un número impar menor o igual a $20\}$.

$D = \{x$ es un número primo$\}$.

$C \cap D = \{$______________________________$\}$



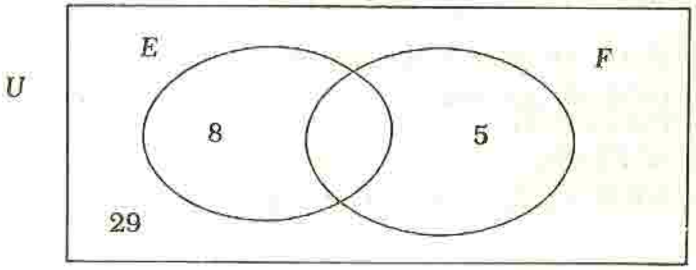
(Coloree de rojo el conjunto $C \cap D$).

b) $U = \{x$ es un número natural menor que $31\}$.

$E = \{x$ es un número par menor que $20\}$.

$F = \{x$ es un divisor de $20\}$.

$E \cap F = \{$______________________________$\}$.



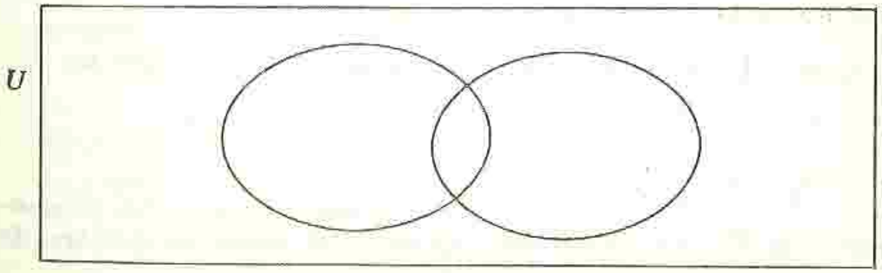
(Coloree de rojo a $E \cap F$).

c) $U = \{x$ es un número natural menor o igual a $20\}$.

$G = \{x$ es un divisor de $40\}$.

$H = \{x$ es un divisor de $16\}$.

$G \cap H = \{$______________________________$\}$.



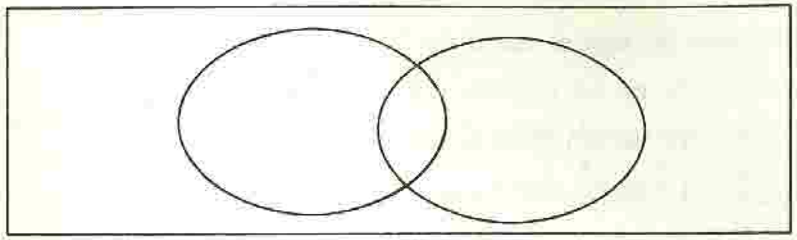
(Coloree de rojo a $G \cap H$).

d) $U = \{x$ es un ser humano$\}$.

$I = \{x$ es un mexicano$\}$.

$J = \{x$ es una persona rubia$\}$.

$I \cap J = \{$______________________________$\}$.



(Coloree de rojo a $I \cap J$).

e) $U = \{x$ es una figura geométrica$\}$.

$K = \{x$ es un polígono$\}$.

$L = \{x$ es un triángulo$\}$.

$K \cap L = \{$______________________________$\}$.

(Coloree de rojo a $K \cap L$).

Ejercicio 17. Utilizando el ejercicio 15 asocie un conjunto a cada una de las proposiciones dadas y dibuje en cada caso un diagrama de Venn que describa la situación.

Disyunción

La proposición compuesta que se forma con otras dos proposiciones ligadas por medio del conectivo "o" recibe el nombre de *disyunción*. Por ejemplo, son disyunciones las siguientes proposiciones compuestas:

a) 16 es un número mayor que 5 o menor que 18.

b) Napoleón nació en París o Napoleón fue ciudadano francés.

c) Los cuadriláteros tienen 4 lados o tienen 4 ángulos interiores.

d) 4 es mayor que 5 o 4 es igual a 5.

Cuando expresemos una disyunción daremos a entender con ella nuestra opinión de que al menos una de las proposiciones dadas es verdadera (aunque podría ser que ambas fueran ciertas). Ahora bien, si se demuestra que en realidad las dos proposiciones de nuestra disyunción son falsas, entonces ésta es falsa. Pero si una de ellas es verdadera (o las dos), entonces nuestra disyunción será verdadera.

Ejemplo.

a) Si afirmamos que "16 es un número mayor que 5 o 16 es menor que 18" estamos señalando que *al menos*, una de las dos proposiciones es verdadera. Como las dos son verdaderas, entonces nuestra afirmación es también verdadera.

b) Si afirmamos que "Napoleón nació en París o Napoleón fue ciudadano francés", estamos indicando que *al menos* una de las dos proposiciones que forman la disyunción es verdadera.

Si analizamos las proposiciones que forman la disyunción vemos que:

$$\underbrace{\text{“Napoleón nació en París}}_{\text{F}} \text{ o } \underbrace{\text{Napoleón fue ciudadano francés”}}_{\text{V}}.$$

Una de las dos es verdadera y, por consiguiente, la disyunción es verdadera.

c) Al afirmar que "4 es mayor que 5 o 4 es igual a 5" opinamos que por lo menos una de las proposiciones de esa disyunción es verdadera. Ahora bien, en realidad tenemos que las dos son falsas.

$$\underbrace{\text{4 es mayor que 5}}_{\text{F}} \text{ o } \underbrace{\text{4 es igual a 5}}_{\text{F}}.$$

Por consiguiente, nuestra disyunción es falsa.

Ejercicio 18. En cada uno de los incisos determine la verdad o falsedad de cada una de las disyunciones dadas. Observe el ejemplo.

a) $\underbrace{\underbrace{\text{4 es mayor que 5}}_{\boxed{F}}\text{ o }\underbrace{\text{4 es menor que 5.}}_{\boxed{F}}}_{\boxed{F}}$

b) $\underbrace{\underbrace{\text{5 es mayor que 0}}_{\boxed{}}\text{ o }\underbrace{\text{5 es igual a 0.}}_{\boxed{}}}_{\boxed{}}$

c) $\underbrace{\underbrace{\text{12 es mayor que 12}}_{\boxed{}}\text{ o }\underbrace{\text{12 es igual a 12.}}_{\boxed{}}}_{\boxed{}}$

d) $\underbrace{\underbrace{\text{Deimos es satélite de Saturno}}_{\boxed{}}\text{ o }\underbrace{\text{Fobos es satélite de Venus.}}_{\boxed{}}}_{\boxed{}}$

e) $\underbrace{\underbrace{\text{El núcleo atómico tiene protones}}_{\boxed{}}\text{ o }\underbrace{\text{electrones.}}_{\boxed{}}}_{\boxed{}}$

f) $\underbrace{\underbrace{\text{Todo número primo es impar}}_{\boxed{}}\text{ o }\underbrace{3350 = 1690 \quad 1350.}_{\boxed{}}}_{\boxed{}}$

g) $\underbrace{\underbrace{\text{Algunos números naturales son primos}}_{\boxed{}}\text{ o }\underbrace{\text{algunos números son impares.}}_{\boxed{}}}_{\boxed{}}$

h) $\underbrace{\underbrace{\text{Marte es un planeta exterior}}_{\boxed{}}\text{ o }\underbrace{\text{Mercurio es un planeta exterior.}}_{\boxed{}}}_{\boxed{}}$

i) $\underbrace{\underbrace{\text{En la era paleozoica había mamíferos}}_{\boxed{}}\text{ o }\underbrace{\text{en la era cenozoica hombres.}}_{\boxed{}}}_{\boxed{}}$

j) $\underbrace{\underbrace{\text{Un átomo de fierro tiene 26 electrones}}_{\boxed{}}\text{ o }\underbrace{\text{un átomo de yodo tiene 10.}}_{\boxed{}}}_{\boxed{}}$

k) $\underbrace{\underbrace{\text{El paramecio es un vegetal}}_{\boxed{}}\text{ o }\underbrace{\text{la amiba es un animal.}}_{\boxed{}}}_{\boxed{}}$

Si a partir de dos proposiciones p y q se forma una disyunción, entonces a ésta se le designa como $p \vee q$ (léase "p o q").

Ejemplo:

Si m = Las algas son vegetales.
y n = Las ballenas son mamíferos.

entonces,

$m \vee n$ = Las algas son vegetales o las ballenas son mamíferos.

Si r = Los núcleos de los átomos tienen neutrones.

y s = Las moléculas constan de átomos.

$r \vee s$ = Los núcleos de los átomos tienen neutrones o las moléculas constan de átomos.

Ejercicio 20. Complete las igualdades e indique la verdad o falsedad de cada disyunción.

a) p = Cleopatra era egipcia.
q = Marco Antonio era egipcio.

$p \vee q$ = ________________________________

$p \vee q$ es una proposición ____________________
(**falsa, verdadera**).

b) e = Los alpes están en América.
f = El Everest está en Africa.

$e \vee f$ = ________________________________

$e \vee f$ es una proposición ____________________
(**falsa, verdadera**).

c) h = "La Iliada" fue escrita por Sócrates.
i = La Odisea fue escrita por Homero.

$h \vee i$ = ________________________________

$h \vee i$ es una proposición ____________________
(**falsa, verdadera**).

d) j = Algunos vegetales son angiospermas.
k = Algunos reptiles son venenosos.

$j \vee k$ = ________________________________

$j \vee k$ es una proposición ____________________
(**falsa, verdadera**).

e) l = Venus tiene atmósfera.
m = La Luna carece de atmósfera.

$l \vee m$ = ________________________________

$l \vee m$ es una proposición ____________________
(**falsa, verdadera**).

Si unimos dos proposiciones abiertas con el conectivo "o", a la proposición abierta resultante también la llamaremos disyunción y la simbolizaremos como ya sabemos hacerlo.

Ejemplo:

a) n = x es un número primo.
p = x es un número impar.
$n \vee p$ = x es un número primo o x es un número impar.

b) r = x es un múltiplo de 5.
t = x es un múltiplo de 2.
$r \vee t$ = x es un múltiplo de 5 o x es un múltiplo de 2.

Resultará útil más adelante considerar los objetos que hacen verdaderas a disyunciones como las de los ejemplos.

Por lo que sabemos, una disyunción es verdadera si una u otra de las proposiciones es verdadera o las dos son verdaderas.

Entonces, en la disyunción $n \vee p$ del inciso a), los objetos que la hacen verdadera son:

a) Los números primos (que hacen cierta la proposición n)
b) Los números impares (que hacen verdadera la proposición p)
c) Los números primos que son impares (que hacen ciertas las dos proposiciones al mismo tiempo)

Resulta también sencillo saber qué objetos hacen verdadera la proposición $r \vee t$. Estos son:

a) Los números múltiplos de 5 (que hacen verdadera la proposición r).
b) Los números múltiplos de 2 (que hacen verdadera la proposición t).
c) Los números que son múltiplos comunes de 2 y 5 (que hacen verdaderas las dos proposiciones al mismo tiempo).

Ejercicio 21. En cada inciso encuentre la disyunción de las proposiciones dadas y describa, en las líneas numeradas, los objetos que la hacen verdadera.

a) a = x es un divisor de 40.
b = x es un múltiplo de 2.

$a \vee b$ = ________________________________

Los objetos que hacen verdadera a $a \vee b$ son:

1. ____
2. ____
3. ____

b) $c = x$ es un metal.
$d = x$ es un líquido a temperatura normal.
$c \vee d$ = ____

Los objetos que hacen verdadera a $c \vee d$ son:

1. ____
2. ____
3. ____

c) $e = x$ es un número natural menor que 16.
$f = x$ es un número natural mayor que 9.
$e \vee f$ = ____

Los objetos que hacen verdadera a $c \vee f$ son:

1. ____
2. ____
3. ____

d) $g = x$ es un planeta exterior.
$h = x$ es un planeta interior.
$g \vee h$ = ____

Los objetos que hacen verdadera a $g \vee h$ son:

1. ____
2. ____
3. ____

e) $i = x$ es un americano.
$j = x$ es un mexicano.
$i \vee j$ = ____

Los objetos que hacen verdadera a $i \vee j$ son:

1. ____
2. ____
3. ____

Disyunción y Unión

Antes hemos utilizado negaciones y conjunciones para determinar conjuntos. Ahora, en esta sección, veremos cómo se relaciona la disyunción (de proposiciones) con la unión (de conjuntos).

Aquí también, como antes lo hemos hecho, observaremos una situación concreta para analizar esa relación:

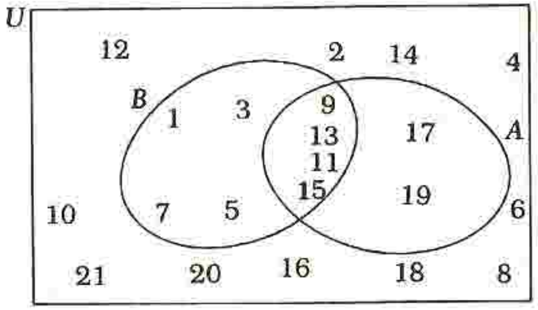
Sea U un conjunto universal y A y B dos de sus conjuntos.

$U = \{x$ es un número natural menor que $21\}$.

$A = \{x$ es un número impar mayor que $7\}$.

$B = \{x$ es un número impar menor que $17\}$.

Un diagrama de Venn para estos tres conjuntos es el siguiente:



Las proposiciones abiertas "x es un número impar mayor que 7" y "x es un número impar menor que 17" determinan los conjuntos A y B respectivamente.

Si formamos la disyunción de las proposiciones anteriores, ésta será así:

"x es un número impar mayor que 7 o x es un número impar menor que 7".

Y los objetos que la hacen verdadera son:

a) Los números impares mayores que 7 (9, 11, 13, 15, 17, 19).
b) Los números impares menores que 17 (15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1).
c) Los números que son, al mismo tiempo, mayores que 7 y menores que 17. (9, 11, 13 y 15.)

Observamos que el conjunto de objetos que hacen cierta la disyunción es la unión de los conjuntos A y B.

$A \cup B$ = {x es un número impar mayor que 7 o x es un número impar menor que 17}.

> Si las proposiciones abiertas p y q determinan los conjuntos P y Q, respectivamente, entonces la disyunción $p \vee q$ determina al conjunto $P \cup Q$.

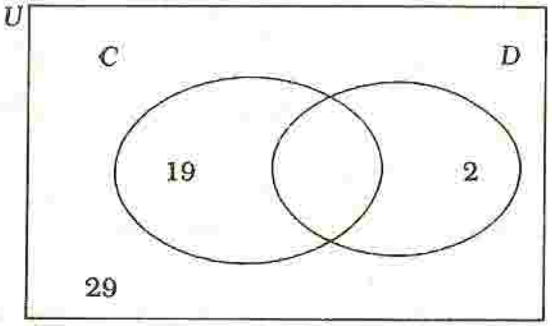
Ejercicio 22. En cada inciso determine la unión de los conjuntos dados y complete el diagrama.

a) U = {x es un número natural menor que 31}.

C = {x es número impar menor o igual a 20}.

D = {x es un número primo}.

$C \cup D$ = {________________________}.



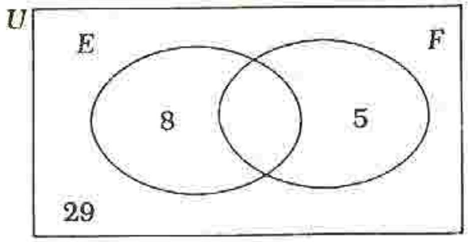
(Coloree de rojo el conjunto $C \cup D$).

b) U = {x es un número natural menor que 31}.

E = {x es un número par menor que 20}.

F = {x es un divisor de 20}.

$E \cup F$ = {________________________}.



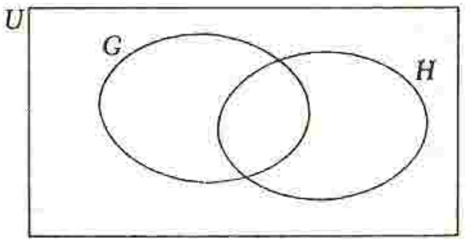
(Coloree de rojo a $E \cup F$).

c) U = {x es un número natural menor o igual a 20}.

G = {x es un divisor de 40}.

H = {x es un divisor de 16}.

$G \cup H$ = {________________________}.



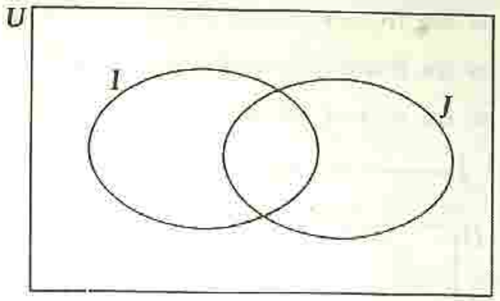
(Coloree de rojo a $G \cup H$).

d) U = {x es un ser humano}.

I = {x es un mexicano}.

J = {x es una persona rubia}.

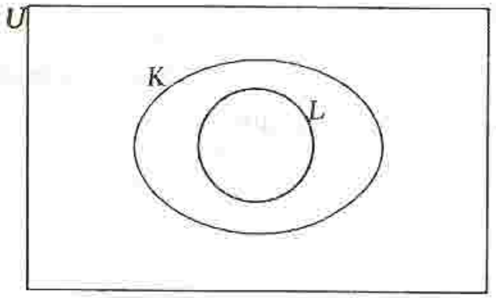
$I \cup J$ = {________________________}.



(Coloree de rojo a $I \cup J$).

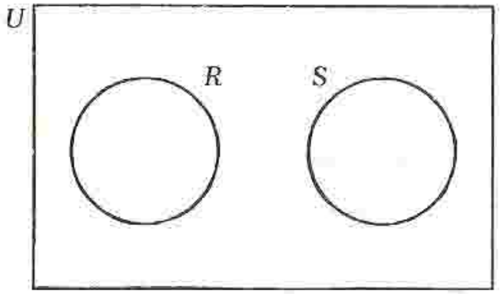
e) $U = \{x \text{ es una figura geométrica}\}$.
$K = \{x \text{ es un polígono}\}$.
$L = \{x \text{ es un triángulo}\}$.

$K \cup L = \{$ _______________________________ $\}$.



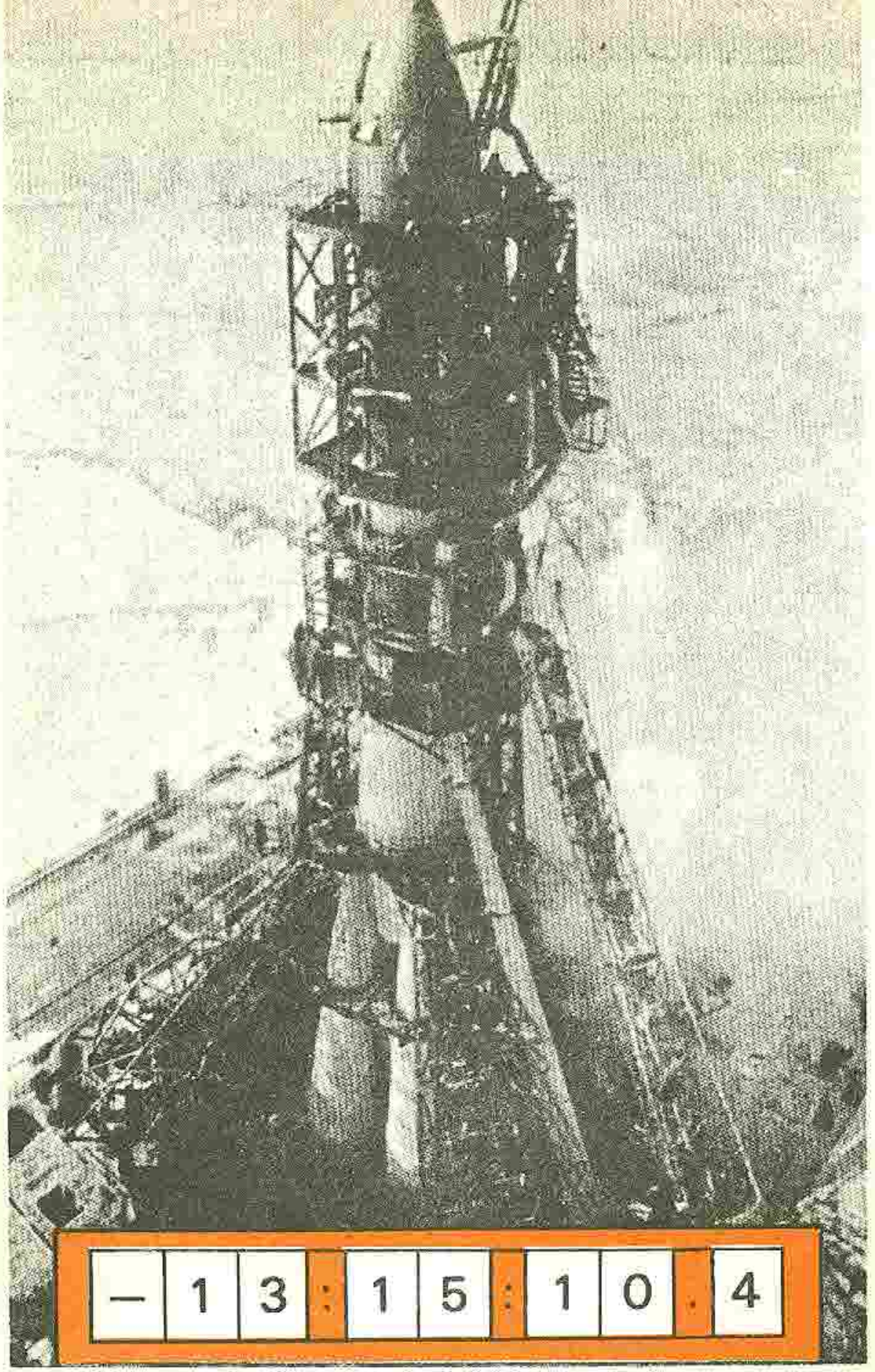
(Coloree de rojo a $K \cup L$).

f) $U = \{x \text{ es un latinoamericano}\}$
$R = \{x \text{ es un cubano}\}$
$S = \{x \text{ es un argentino}\}$
$R \cup S = \{$ _______________________________ $\}$



(Coloree de rojo a $R \cup S$).

Ejercicio 23. Utilizando las datos del ejercicio 21 asocie un conjunto a cada una de las proposiciones dadas y dibuje en cada caso un diagrama de Venn que describa la situación.



Hablamos de *menos* trece horas quince minutos diez segundos y cuatro décimos de segundo *antes* de un lanzamiento.

SEGUNDA UNIDAD

LOS NUMEROS RACIONALES

OBJETIVOS PARTICULARES

Al terminar el estudio de esta unidad, el alumno:

I. Habrá construido el conjunto de los números racionales, a partir del conjunto de los números racionales no negativos.
II. Podrá reconocer la equivalencia entre fracciones.
III. Conocerá la relación de orden entre los números racionales.
IV. Manejará la adición y sustracción de números racionales, y sus correspondientes propiedades, en la resolución de ejercicios y problemas.
V. Manejará la multiplicación y división de números racionales, y sus propiedades, en la resolución de ejercicios y problemas.

I. EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS RACIONALES

Hasta este momento hemos manejado, en la resolución de algunos problemas y en la ejecución de ciertas mediciones, los números racionales no negativos. Y también hemos aprendido a operar con los números enteros, tanto positivos como negativos. Se nos ocurre ahora preguntar: ¿Existen los números racionales negativos? De ser así, ¿cómo son esos números? ¿Tendrán aplicaciones prácticas? ¿Qué operaciones se podrán realizar con ellos? ¿Qué propiedades tendrán esas operaciones?

Todas estas preguntas, y otras más que surjan acerca de los números racionales, irán siendo contestadas a medida que vayamos estudiando las siguientes páginas.

Problema. ¿Cuál es la solución de cada una de estas ecuaciones?

$$a + 4 = 0$$
$$x + 9 = 2$$
$$n + \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$$
$$y + .8 = .2$$

De acuerdo con nuestros conocimientos actuales, podemos resolver las dos primeras ecuaciones porque sabemos manejar los números enteros negativos. (Así tenemos que $a = -4$ y $x = -7$.) Pero para las dos últimas ecuaciones no hallamos solución, pues entre los números que conocemos no hay ninguno que sumado con $\frac{5}{3}$ nos dé $\frac{1}{3}$ o alguno que sumado con .8 dé la suma .2.

Sin embargo, la resolución de las dos primeras ecuaciones nos sugiere que las dos últimas podrían tener solución si contáramos con otros números negativos, y éstos serían precisamente números racionales negativos. ¿Qué número negativo se le ocurre a usted como solución de la ecuación $n + \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$? ¿Y qué número negativo podría ser solución de la ecuación $y + .8 = .2$?

A fin de tener la posibilidad de resolver ecuaciones como las anteriores, el hombre creó los **números racionales negativos.** Y los creó de una manera muy simple: *Por cada racional positivo* inventó *un racional negativo,* al que llamó **su opuesto.**

Así, por ejemplo, conociendo el número 1 inventó el -1 ("menos uno"); dado el número $\frac{3}{4}$ inventó el número $-\frac{3}{4}$ ("menos $\frac{3}{4}$"); para el número .5 inventó el $-.5$ ("menos .5") etcétera.

De esta manera, todo racional positivo tiene su opuesto negativo; o bien, todo racional negativo tiene su opuesto positivo.

Ejercicio 1. De acuerdo con la idea anterior, complete las expresiones siguientes.

a) El número -8 es el opuesto del número ______

b) El opuesto del número .6 es el racional negativo ______

c) El opuesto de .68 es el racional negativo ______

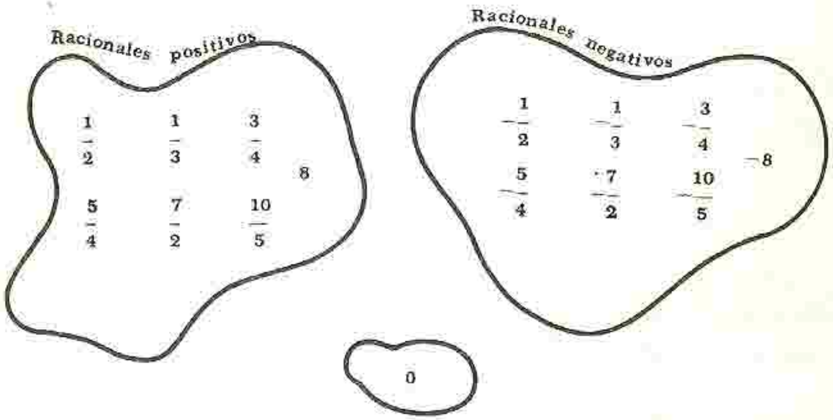
d) El número $-\frac{12}{5}$ es el opuesto de ______

e) Los números $\frac{1}{2}$ y ______ son opuestos.

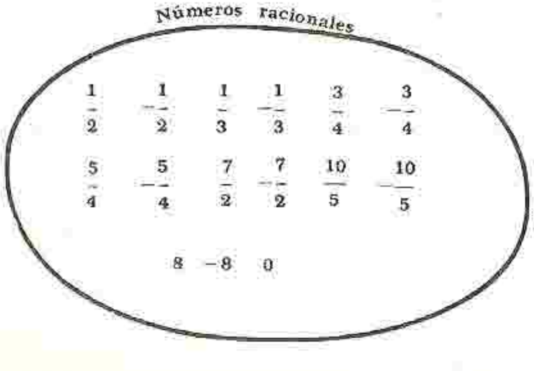
f) Los números -4.2 y ______ son opuestos.

g) Los números -7.3 y 7.3 son ______

Con los números que llevamos estudiados hasta aquí podemos formar tres conjuntos: el conjunto Q^+ de los *racionales positivos,* el conjunto Q^- de los *racionales negativos* y el conjunto que tiene como único elemento al *cero*:



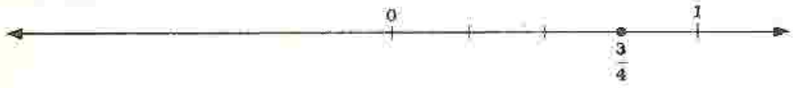
Si ahora consideramos en un solo conjunto todos los elementos de estos tres conjuntos, tendremos lo que se llama **el conjunto Q de los números racionales.**



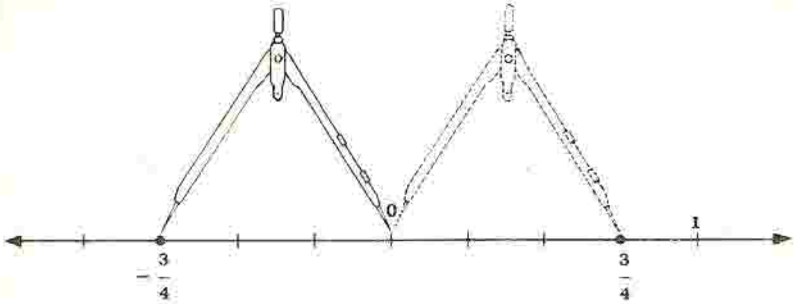
1. Los números racionales en la recta numérica

La idea de números opuestos se puede ilustrar con mucha facilidad en la recta numérica. Ya hicimos eso al estudiar los números enteros en el curso anterior; ahora lo haremos con los números racionales.

Consideremos, por ejemplo, el número $\frac{3}{4}$ en la siguiente recta numerica. (Obsérvese que queda a la derecha del cero.)

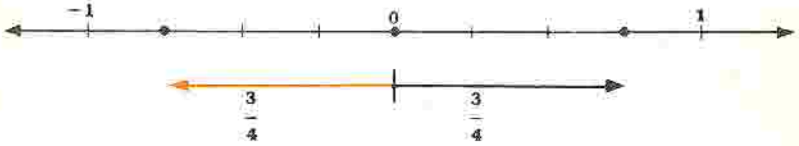


El opuesto de este número se localiza en el otro lado, a la izquierda del cero.



(Obsérvese que el compás nos permite localizar el punto $-\frac{3}{4}$ de tal modo que su distancia al cero es igual a la distancia que hay entre $\frac{3}{4}$ y 0.)

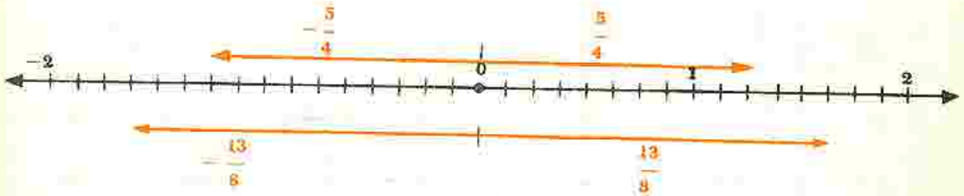
Si representamos estos números, $\left(\frac{3}{4} \text{ y } -\frac{3}{4}\right)$ con flechas o desplazamientos, observamos que éstos son de la misma medida, pero se realizan en sentidos opuestos.



En resumen, si deseamos ilustrar números racionales con la recta numérica, podemos hacerlo señalando puntos en ella:

(Obsérvese que el cero no es positivo ni negativo.)

O bien, podemos trazar flechas que indiquen los desplazamientos correspondientes a los números que deseamos ilustrar:



Ejercicio 2. Localice en cada recta numérica los números opuestos a los que están señalados.

a)

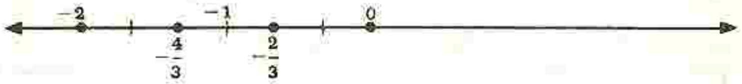
b)

c)

d)

e)

f)



g)

Ejercicio 3. En cada recta numérica señale los desplazamientos que corresponden a los números dados.

a) $-\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}$

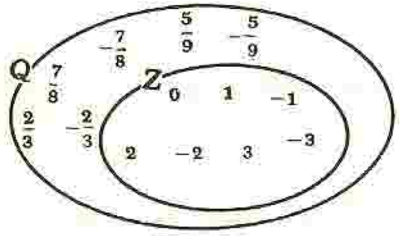
b) .8, −.8

c) 1.4, −1.4

d) $-1\frac{3}{4},\ 1\frac{3}{4}$

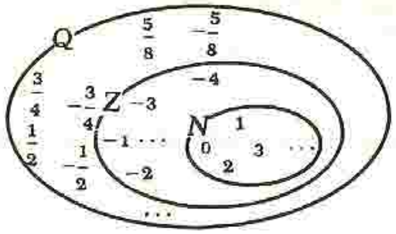
e) 2.5, −2.5

En esta ilustración de los números racionales (la recta numérica) podemos apreciar de inmediato que **los números enteros son números racionales.** O sea, que el conjunto Z es un subconjunto del conjunto Q. Este hecho también puede ilustrarse con un diagrama como el siguiente:



$$\boxed{Z \subset Q}$$

En virtud de que *todo número natural es entero,* podemos hacer un diagrama como el siguiente, para ilustrar la relación que hay entre los conjuntos N, Z y Q:



$$\boxed{N \subset Z \subset Q}$$

("N es subconjunto de Z y Z es subconjunto de Q".) Aquí observamos que *todo número natural es entero* y *todo número entero es racional* y, por lo tanto, **todo número natural es racional.**

Ejercicio 4. Encuentre una fracción que denote al número entero dado en cada inciso.

a) 6 =
b) −2 =
c) 100 =

d) −50 =
e) −500 =
f) 340 =

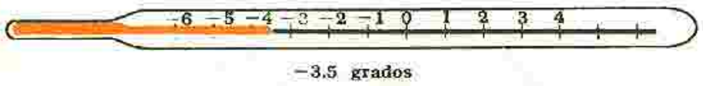
g) 0 =
h) −100 =
i) −125 =

2. Algunas aplicaciones prácticas de los números racionales

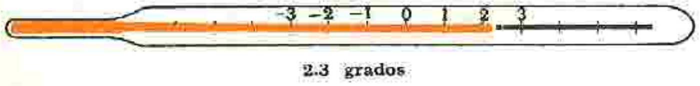
En el curso anterior vimos que los números enteros se utilizan en situaciones en las que es necesario considerar posiciones o movimientos con cierto sentido. Por ejemplo, para marcar temperaturas *bajo cero* o *sobre cero*; o bien, para señalar desplazamientos *hacia la izquierda* o *hacia la derecha* de un origen.

Ahora que estamos manejando números racionales, podríamos utilizarlos también para esos casos y otros más que son semejantes.

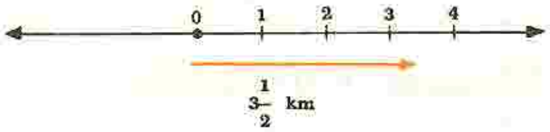
Ejemplo. Podemos decir que una temperatura de 3.5 grados *bajo cero* es una temperatura de −3.5 grados.



Una temperatura de 2.3 grados sobre cero se indica simplemente como 2.3 grados.

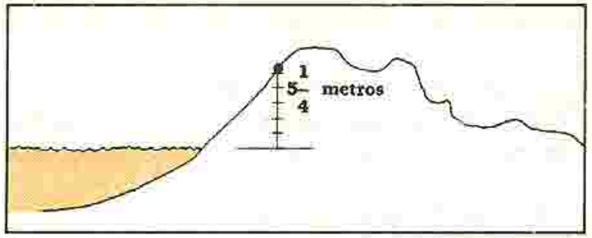


Ejemplo. Tomando una ciudad como punto de partida, un desplazamiento de $3\frac{1}{2}$ kilómetros, efectuado por una persona *hacia el Este*, podría indicarse como el desplazamiento $3\frac{1}{2}$.

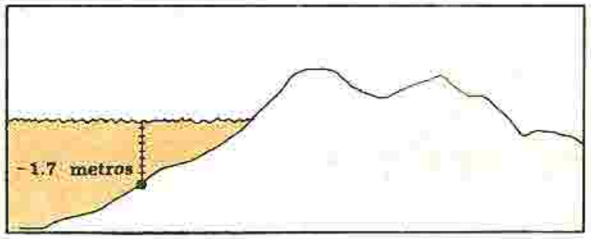


En tal caso, un desplazamiento de 2.8 kilómetros *hacia el Oeste* podrá indicarse como el desplazamiento −2.8.

Ejemplo. La posición de un objeto que está a $5\frac{1}{4}$ metros *sobre el nivel del mar* puede indicarse como la posición $5\frac{1}{4}$.



De acuerdo con esto, la posición de un objeto que se encuentre a 1.7 metros *bajo el nivel del mar* deberá indicarse como la posición −1.7.



Ejemplo. En la situación financiera de un negocio, una *ganancia* de $545.75 podría indicarse con el número 545.75. Así, una *pérdida* de $320.50 tendrá que anotarse como −320.50.

Ejercicio 5. Piense en otras tres situaciones en las que se requiera la utilización de los números racionales.

3. Los cocientes de enteros son números racionales

En el curso anterior, al estudiar los números enteros, vimos que, manejando solamente esa clase de números, era imposible hallar el cociente de divisiones como

$$\frac{3}{2} = \square, \quad \frac{-7}{4} = \square, \quad \frac{-8}{-16} = \square \quad \text{y} \quad \frac{3}{-2} = \square$$

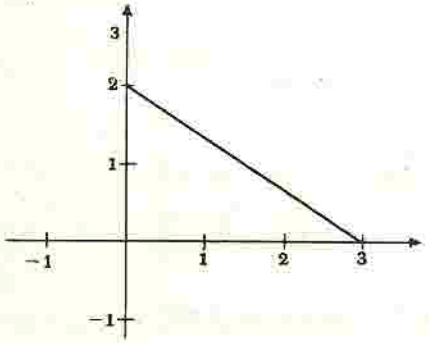
Es decir, había divisiones de enteros que no podían efectuarse.

Ahora que conocemos los números racionales podemos ver, en una ilustración, cuál es el resultado de efectuar divisiones como esas.

¿Recuerda usted cómo ilustramos la multiplicación de enteros? Para ilustrar la división vamos a utilizar exactamente los mismos elementos. Veamos en algunos ejemplos cómo se hace este trabajo.

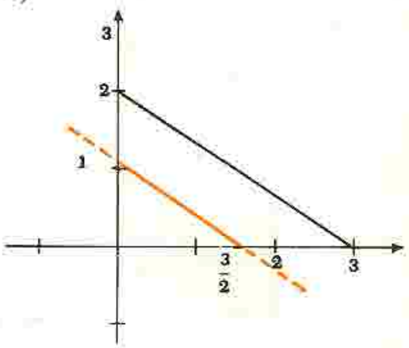
Ejemplo. El cociente que resulta de dividir 3 entre 2 se puede encontrar gráficamente así:

a)



Tomamos el punto 3 (el dividendo) en el eje de las abscisas y el punto 2 (el divisor) en el eje de las ordenadas y trazamos el segmento que une esos dos puntos.

b)



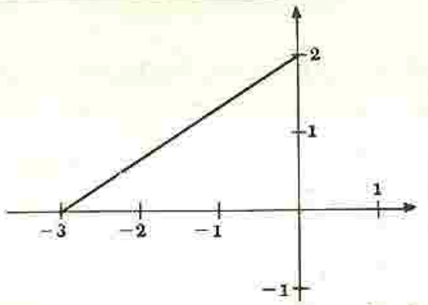
Por el punto 1 del eje de las ordenadas trazamos una paralela al segmento que teníamos. El punto donde esta paralela corta al eje de las abscisas es el cociente que buscamos.

Según puede apreciarse en la figura, el resultado de la división

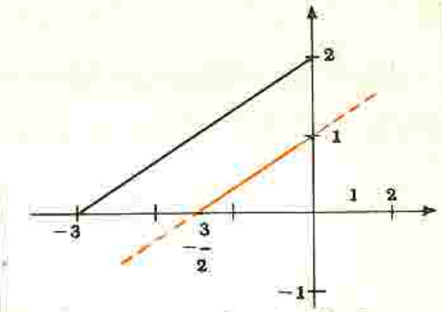
$3 \div 2 =$ 🟧 es el número racional $\frac{3}{2}$.

$$3 \div 2 = \boxed{\frac{3}{2}}$$

Ejemplo. Encontremos gráficamente el cociente de la división $(-3) \div 2 =$ 🟧



Tomamos el punto −3 en el eje de las abscisas y el punto 2 en el eje de las ordenadas y trazamos el segmento que los une.

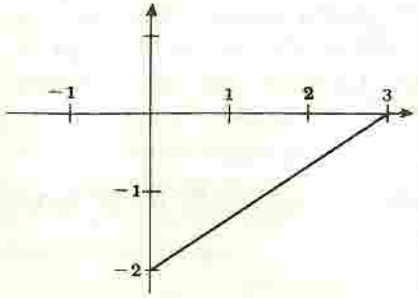


Por el punto 1 del eje de las ordenadas trazamos una paralela al segmento anterior. El punto donde esta paralela corta al eje de las abscisas es el cociente que buscamos.

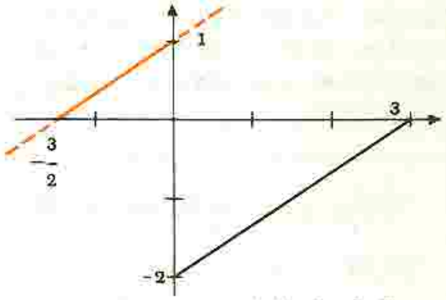
Según puede verse en la ilustración, el cociente de la división $(-3) \div 2 =$ 🟧 es el número racional $-\frac{3}{2}$.

$$-3 \div 2 = \boxed{-\frac{3}{2}}$$

Ejemplo. Determinemos gráficamente el resultado de la división $3 \div (-2) =$ 🟧



Tomamos el dividendo (3) en el eje de las abscisas y el divisor (−2) en el eje de las ordenadas, y trazamos el segmento cuyos extremos son esos dos puntos.

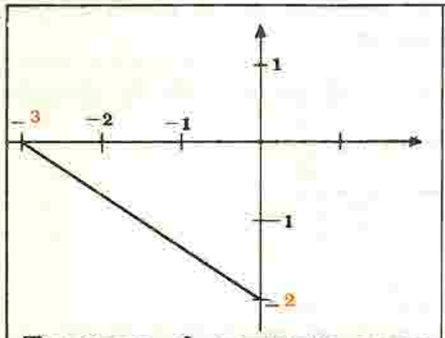


Por el punto 1 del eje de las ordenadas trazamos una paralela al segmento que tenemos. Esta paralela corta el eje de las abscisas en un punto que es el cociente $3 \div (-2)$ que buscamos.

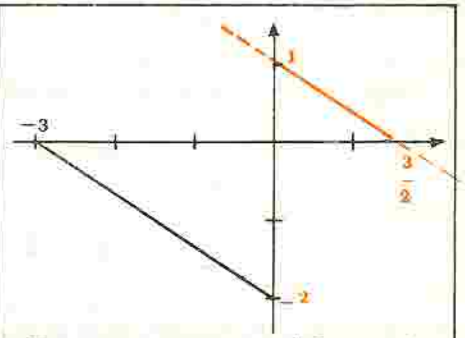
En esta ilustración podemos apreciar que el resultado de la división $3 \div (-2) =$ es el número $-\frac{3}{2}$

$$\boxed{3 \div (-2) = \boxed{-\frac{3}{2}}}$$

Ejemplo. Encontremos gráficamente el cociente de la división $(-3) \div (-2- =$



Trazamos el segmento cuyos cuyos extremos son el punto -3 del eje de las abscisas y el punto -2 del eje de las ordenadas. Estos extremos son el dividendo y el divisor, respectivamente.



Trazamos una paralela a este segmento (que pase por el punto 1 del eje de las ordenadas). El punto donde esta paralela corta al eje de las abscisas es el cociente de la división $(-3) \div (-2) =$

Según apreciamos en la ilustración, el resultado de la división propuesta es el número $\frac{3}{2}$. Esto es,

$$\boxed{-3 \div -2 = \boxed{\frac{3}{2}}}$$

¿Qué observa usted de particular en las divisiones ilustradas?

Si observamos las ilustraciones que hemos hecho, notaremos que son cuatro divisiones distintas, pero sólo hay dos posibles cocientes: el número $\frac{3}{2}$, o bien, su opuesto $-\frac{3}{2}$.

$$\boxed{\begin{array}{l} 3 \div 2 \ \boxed{\frac{3}{2}} \\ -3 \div -2 = \boxed{\frac{3}{2}} \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} -3 \div 2 = \boxed{-\frac{3}{2}} \\ 3 \div -2 = \boxed{-\frac{3}{2}} \end{array}}$$

¿Recuerda usted alguna otra forma de indicar la división?

Si empleamos la forma $\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} =$ cociente, para expresar las divisiones anteriores, obtenemos lo siguiente:

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{3}{2} = \boxed{\frac{3}{2}} \\ \frac{-3}{-2} = \boxed{\frac{3}{2}} \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} \frac{-3}{2} = \boxed{-\frac{3}{2}} \\ \frac{3}{-2} = \boxed{-\frac{3}{2}} \end{array}}$$

En cursos posteriores se demuestra que esta forma de localizar gráficamente el cociente de dos números es correcta. De modo que, considerando la validez de esto, podemos hacer la siguiente afirmación: Los cocientes de números enteros son números racionales. Y aún más, podemos señalar que si m y n son dos números enteros positivos, entonces

$$\boxed{\frac{-m}{n} = \frac{m}{-n} = -\frac{m}{n}}$$

$$\boxed{\frac{-m}{-n} = \frac{m}{n}}$$

Ejercicio 6. Encuentre gráficamente, en un sistema de coordenadas, el cociente que se pide en cada inciso. Después escríbalo en el cuadrito correspondiente.

a) $\frac{3}{4} =$

b) $\frac{-3}{4} =$

c) $\frac{-3}{-4} =$

d) $\frac{3}{-4} =$

e) $\frac{5}{2} =$

f) $\frac{-5}{2} =$

g) $\frac{-5}{-2} =$

h) $\frac{5}{-2} =$

i) $\frac{0}{5} =$

j) $\frac{0}{-3} =$

Según podemos observar, cualquier fracción (o cociente de enteros) sólo puede denotar un racional positivo o bien, un racional negativo o bien al cero. Parece entonces natural clasificar también a las fracciones en positivas, negativas y el 0.

Así, si una expresión denota un racional positivo, diremos que es una *fracción positiva* y si denota un racional negativo, diremos que es una *fracción negativa.*

Ejemplo. Las siguientes fracciones son negativas:

$$\frac{-5}{2} \quad \frac{-8}{4} \quad \frac{-3}{5} \quad \frac{1}{-2} \quad \frac{3}{-4} \quad \frac{8}{-4} \quad -\frac{2}{3} \quad -\frac{1}{2}$$

Ejemplo. Estas otras son fracciones positivas:

$$\frac{3}{4} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{12}{3} \quad \frac{7}{2} \quad \frac{-2}{-3} \quad \frac{-12}{-3} \quad \frac{-4}{-5} \quad \frac{-5}{-6}$$

Ejercicio 7. De las siguientes fracciones, encierre en un círculo rojo las que son negativas y en un rectángulo azul las que son positivas. Si denotan el cero, simplemente táchelas.

$$\frac{5}{8} \quad \frac{-3}{9} \quad \frac{-6}{-4} \quad \frac{12}{-15} \quad \frac{0}{8} \quad \frac{0}{-3} \quad \frac{-2}{-1} \quad \frac{5}{-6} \quad \frac{10}{12} \quad \frac{1}{4}$$

II. FRACCIONES EQUIVALENTES

Problema. Localice en la siguiente recta numérica los números $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ y $\frac{8}{12}$

¿Qué nota usted de especial?

Problema. Localice los números $-\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{4}$ y $-\frac{4}{8}$ en la siguiente recta numérica.

¿Observa usted alguna particularidad?

Si aceptamos que a cada punto de la recta numérica le corresponde uno, y solamente uno, de los elementos de Q, entonces las fracciones $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ y $\frac{8}{12}$ (que corresponden a *un mismo punto* en la recta numérica) son nombres distintos de *un mismo número racional.* Dicho de otra manera, **las fracciones $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ y $\frac{8}{12}$ son fracciones equivalentes.**

Por eso se acostumbra escribir

$$\boxed{\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12}}$$

También tenemos que las fracciones $-\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{4}$ y $-\frac{4}{8}$ son *fracciones equivalentes*; es decir, todas ellas nombran el mismo número racional. Esto se ve fácilmente en la recta numérica al observar que las tres fracciones corresponden a un sólo punto. Entonces, también podemos escribir

$$\boxed{-\frac{1}{2} = -\frac{2}{4} = -\frac{4}{8}}$$

Ejercicio 8. Encuentre una fracción equivalente a la fracción equivalente a la fracción que se da en cada inciso.

a) $\frac{5}{6} =$ b) $\frac{3}{8} =$ c) $\frac{7}{10.} =$

d) $-\frac{3}{4} =$ e) $-\frac{5}{3} =$ f) $-\frac{10}{15} =$

g) $\frac{-5}{4} =$ h) $\frac{3}{-2} =$ i) $\frac{-4}{-12} =$

Problema. ¿Cómo se sabe si dos fracciones dadas son equivalentes o no lo son? Por ejemplo, ¿qué haría usted para determinar si las fracciones $\frac{8}{12}$ y $\frac{14}{21}$ son equivalentes o no? ¿Usaría la recta numérica?

Antes hemos visto que si a, b, c, d son enteros positivos, entonces

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si, y sólo si } a \cdot d = b \cdot c}$$

Más adelante veremos que lo anterior es válido también cuando a, b, c y d son enteros cualesquiera (con b y d diferentes de cero). Esto significa que el criterio para reconocer cuándo son equivalentes dos fracciones dadas, puede ser aplicado también para el caso de que las fracciones sean negativas.

Ejemplo. Ya sabemos que $-\frac{2}{4}$ y $-\frac{4}{8}$ son fracciones equivalentes. Podemos observar que ambas fracciones son negativas y que el producto 2 ×8 es igual al producto 4 × 4.

Ejemplo. Dadas las dos fracciones $\frac{-6}{4}$ y $\frac{-3}{2}$, tenemos que

$$\boxed{\frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}}$$

pues ambas fracciones son negativas y los productos $6 \cdot 2$ y $4 \cdot 3$ son iguales.

Ejemplo. Dadas las fracciones $\frac{-5}{-6}$ y $\frac{-15}{-18}$, encontramos que son equivalentes. Esto es,

$$\boxed{\frac{-5}{-6} = \frac{-15}{-18}}$$

pues las dos fracciones son positivas y los productos (5), (18) y (6) (15) son iguales.

Observación: Ya habrá usted notado que dos fracciones equivalentes satisfacen los dos requisitos siguientes:

1) Ambas son positivas o negativas. (Lo cual es lógico, pues las dos deben nombrar un mismo número.)
2) Los productos "cruzados" entre sus numeradores y denominadores son iguales.

Ahora podemos decir que las fracciones $\frac{8}{12}$ y $\frac{14}{21}$, mencionadas antes, son equivalentes, pues ambas son positivas y los productos 8 × 21 y 12 × 14 son iguales.

Ejercicio 9. Diga usted si las fracciones dadas en cada inciso son equivalentes o no lo son. (Cuando no sean equivalentes diga por qué.)

a) $\frac{3}{4}$ y $\frac{9}{12}$ b) $\frac{5}{2}$ y $\frac{25}{10}$

c) $\frac{-4}{2}$ y $\frac{-6}{3}$ d) $\frac{12}{-8}$ y $\frac{-8}{12}$

e) $\frac{-28}{6}$ y $\frac{28}{6}$ f) $\frac{-30}{15}$ y $\frac{10}{-5}$

g) $\frac{-13}{4}$ y $\frac{26}{-8}$ h) $\frac{-2}{-7}$ y $\frac{-14}{-49}$

i) $\frac{3}{8}$ y $\frac{-9}{-24}$ j) $\frac{-6}{-4}$ y $\frac{21}{14}$

III. EL ORDEN ENTRE LOS NUMEROS RACIONALES

Problema. En el observatorio meteorológico de una ciudad cercana al Polo se vio un lunes que el termómetro marcaba 2.5 grados centígrados por la mañana. Al día siguiente, a la misma hora, el termómetro indicaba una temperatura de -3.1 grados. ¿Cuál de estas temperaturas fue mayor, la del lunes o la del martes?

Para resolver este problema, y otros parecidos, es necesario conocer el orden entre los números racionales.

Ya hemos aprendido a ordenar números racionales no negativos (y también números enteros) valiéndonos de la recta numérica. Ahora, para ordenar números racionales cualesquiera, seguiremos con el mismo criterio:

> Dados dos números racionales cualesquiera, es mayor aquel que en la recta numérica queda a la derecha del otro.

Ejemplo. $\frac{1}{2}$ es mayor que $\frac{1}{8}$ $\left(\frac{1}{2} > \frac{1}{8}\right)$.

Ejemplo. 0 es mayor que $-\frac{1}{3}$ $\left(0 > -\frac{1}{3}\right)$.

(Aquí observamos que cero es mayor que cualquier número negativo pues todo negativo queda siempre a la izquierda del cero.)

Ejemplo. $\frac{1}{10}$ es mayor que cero $\left(\frac{1}{10} > 0\right)$.

(Aquí observamos que 0 es menor que cualquier número positivo, pues todo positivo queda siempre a la ________ del cero.)

Ejemplo. .6 es mayor que $-.8$ $(.6 > -.8)$.

(Aquí observamos que todo número positivo es mayor que cualquier número negativo, pues los positivos están a la derecha del ________.)

Con esto ya podemos resolver nuestro problema inicial diciendo: "Es mayor la temperatura del lunes, pues 2.5 es mayor que -3.1".

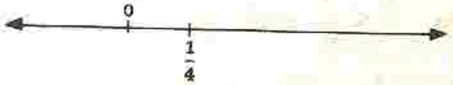
Ejercicio 10. Ordene, de menor a mayor, los números que se dan en cada inciso. (Si es necesario, ayúdese con la recta numérica.)

a) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{3}{6}$

$\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{3}{6}$

b) $\frac{2}{10}, \frac{3}{5}, \frac{-2}{10}$

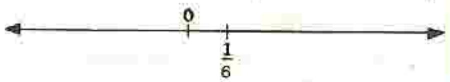
c) $\frac{3}{4}, \frac{0}{2}, \frac{-1}{4}$



d) $\frac{-3}{4}, -1, \frac{1}{2}$

e) 0, -1.5, -2.5

f) $\frac{2}{3}, \frac{-2}{6}, \frac{-2}{3}$



g) 1.8, -1.2, 0

h) $\frac{-3}{5}, -.9, \frac{-12}{10}$

Ejercicio 11. Indique el orden entre los números dados en cada inciso escribiendo el signo $>$ o el signo $<$, según sea el caso. (Si se trata del mismo número escriba el signo $=$).

a) $\frac{3}{4} \square \frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{8} \square \frac{5}{4}$ c) $\frac{-2}{3} \square \frac{1}{5}$

d) $.1 \square -3$ c) $\frac{1}{2} \square .5$ f) $1.3 \square -1.6$

g) $\frac{3}{2} \square -1.5$ h) $1.5 \square \frac{3}{2}$ i) $\frac{2}{7} \square \frac{3}{7}$

j) $\frac{9}{3} \square \frac{-5}{3}$ k) $\frac{-18}{10} \square \frac{-35}{10}$ l) $\frac{-32}{20} \square \frac{-50}{20}$

Ya habrá usted notado qué fácil es ordenar los números racionales cuando están expresados por medio de fracciones que tienen un mismo denominador. Cuando tengamos duda sobre el orden de dos o más números, podemos hacer uso de este recurso: Sustituimos las fracciones dadas por otras fracciones equivalentes que tengan un mismo denominador, y luego observamos el orden.

Ejemplo. ¿Qué número es mayor, $\frac{2}{3}$ o $\frac{3}{4}$? Como $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$ y $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$, decidimos que $\frac{3}{4}$ es mayor que $\frac{2}{3}$.

Ejemplo. $\frac{2}{3} < \frac{4}{5}$, pues $\frac{10}{15} < \frac{12}{15}$.

Ejemplo. $\frac{3}{10} > \frac{25}{100}$

pues $\frac{30}{100} > \frac{25}{100}$

Ejercicio 12. Sustituya cada par de fracciones por otras equivalentes que tengan un mismo denominador y luego indique el orden entre los números, tal como se hace en el inciso a).

a) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ $\boxed{\frac{2}{4}, \frac{3}{4}}$ $\frac{1}{2} \boxed{<} \frac{3}{4}$

b) $\frac{3}{4}, \frac{4}{3}$ $\square$ $\frac{3}{4} \square \frac{4}{3}$

c) $\frac{4}{3}, \frac{9}{6}$ $\square$ $\frac{4}{3} \square \frac{9}{6}$

d) $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}$. $\square$ $\frac{3}{4} \square \frac{2}{3}$

e) $\frac{-5}{2}, \frac{-7}{3}$ $\square$ $\frac{-5}{2} \square \frac{-7}{3}$

f) $\frac{-3}{4}, \frac{-11}{12}$ $\square$ $\frac{-3}{4} \square \frac{-11}{12}$

g) $\frac{1}{2}, \frac{-1}{3}$ $\square$ $\frac{1}{2} \square \frac{-1}{3}$

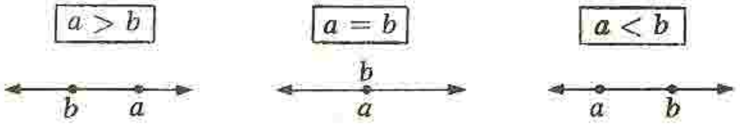
h) $\frac{-17}{8}, \frac{-3}{2}$ $\square$ $\frac{-17}{8} \square \frac{-3}{2}$

Propiedades básicas del orden

Las propiedades del orden entre números enteros, que ya hemos estudiado en otro curso, valen también para números racionales. ¿Las recuerda usted? A continuación las anotamos para que nos sirva sólo como un recordatorio.

Tricotomía

Dados dos números racionales a y b, cualesquiera, siempre ocurre una, y sólo una, de las *tres* posibilidades siguientes:



Transitividad

Dados tres números racionales a, b, c, si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$

Problema. En una competencia de relevos, un corredor inició en la línea de salida y avanzó $\frac{3}{4}$ de kilómetro. Si su relevo corrió otros $\frac{3}{4}$ de kilómetro, ¿qué distancia corrieron entre los dos?

Problema. Una mañana de invierno se vio que el termómetro marcaba -2.5 grados. Después de dos horas se hizo otra lectura y se encontró un aumento de 3.8 grados en la temperatura. ¿Cuántos grados marcaba el termómetro en la segunda lectura?

Para resolver problemas como éstos es necesario conocer las operaciones que se efectúan con los números racionales. A continuación estudiaremos tales operaciones y sus propiedades.

IV. ADICION Y SUSTRACCION DE NUMEROS RACIONALES

Tal como hicimos antes al estudiar la adición de enteros, aquí estudiaremos por separado los tres casos de adición que se presentan al operar con números racionales.

Primero repasaremos el caso en que los dos sumandos son positivos; después veremos el caso en que los dos son negativos y, por último, el caso en que un sumando es positivo y el otro es negativo. Posteriormente utilizaremos este conocimiento para efectuar sustracciones.

1. Adición de dos sumandos positivos

Este es el caso que conocemos desde la escuela primaria. Aquí lo repasaremos con algunos ejemplos y ejercicios.

Ejemplo. $\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \boxed{}$

En la recta numérica se puede ilustrar esta adición de la siguiente manera:

Así vemos que $\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \boxed{\frac{7}{3}}$.

¿Se imagina usted un problema de "recorridos" o de temperaturas, como los que presentamos antes, que corresponda a esta adición?

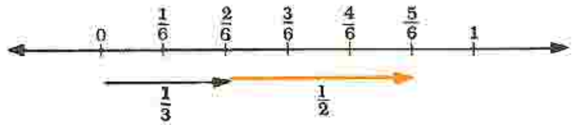
Ejemplo. $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \boxed{}$

Para efectuar esta adición es necesario sustituir las fracciones dadas por otras equivalentes a ellas, que tengan un mismo denominador..

Como $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ y $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, tenemos que

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \boxed{}$$

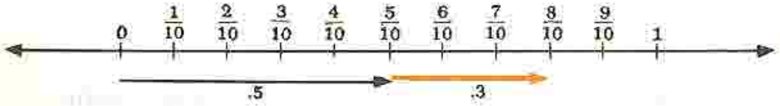
En la recta numérica podemos ilustrar esto así:



De modo que $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{6}}$

Ejemplo. $.5 + .3 = \boxed{}$

Como $.5 = \frac{5}{10}$ y $.3 = \frac{3}{10}$, podríamos ilustrar esta adición así:

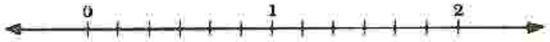


y vemos que $.5 + .3 = \frac{8}{10}$. Esto es, $.5 + .3 = .8$.

Ejercicio 13. Efectúe cada adición e ilústrela en la recta numérica

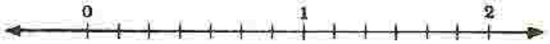
a) $\frac{6}{10} + \frac{8}{10} =$ ☐

b) $\frac{4}{6} + \frac{5}{6} =$ ☐



c) $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} =$ ☐

d) $\frac{5}{7} + \frac{6}{7} =$ ☐

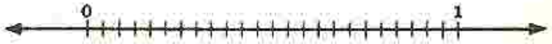


e) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} =$ ☐

f) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} =$ ☐

g) $\frac{3}{10} + \frac{2}{5} =$ ☐

h) $\frac{5}{8} + \frac{1}{3} =$ ☐



i) $\frac{50}{100} + \frac{40}{100} =$ ☐

j) .6 + .8 = ☐

k) .65 + .25 = ☐

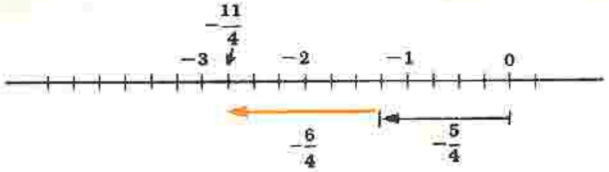
l) 0.7 + 0.9 = ☐

2. Adición de dos sumandos negativos

Si deseamos efectuar, por ejemplo, una adición como

$$\frac{-5}{4} + \left(-\frac{6}{4}\right) =$$

primero podríamos ilustrarla en la forma siguiente:



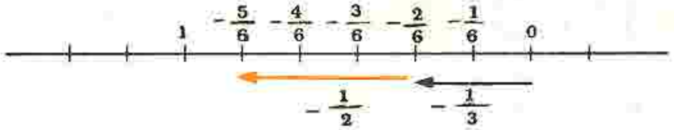
Así encontramos que $-\frac{5}{4} + \left(-\frac{6}{4}\right) = -\frac{11}{4}$

Ejercicio 14. Invente dos problemas de "recorridos", o de temperaturas, que correspondan a la adición anterior.

Una adición como $-\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)$, por ejemplo, se puede efectuar sustituyendo las fracciones así:

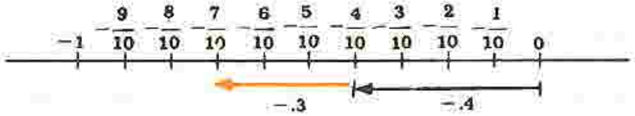
$$-\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{6} + \left(-\frac{3}{6}\right)$$

Esto lo ilustramos en la siguiente forma:



y vemos que $-\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{6}$

Con una adición como $-.4 + (-.3)$ podríamos proceder así:



$$-.4 + (-.3) = \boxed{-.7}$$

Ejercicio 15. Efectúe las adiciones siguientes e ilústrelas en la recta numérica.

a) $-\frac{4}{5}+\left(-\frac{4}{5}\right)=\square$

b) $-\frac{3}{8}+\left(-\frac{6}{8}\right)=\square$

c) $-\frac{3}{2}+\left(-\frac{2}{2}\right)=\square$

d) $-\frac{1}{4}+\left(-\frac{2}{3}\right)=\square$

e) $-\frac{1}{2}+\left(-\frac{2}{3}\right)=\square$

f) $-\frac{2}{5}+\left(-\frac{1}{2}\right)=\square$

g) $-.4+(-.4)=\square$

h) $-0.7+(-0.6)=\square$

i) $-.45+(-.40)=\square$

Los anteriores ejemplos y ejercicios nos sugieren un procedimiento rápido para efectuar adiciones de dos sumandos negativos. Veamos los pasos de este procedimiento en la adición siguiente:

$$-45.2+(-36.5)=\square$$

Primer paso. Efectuamos la adición como si los sumandos fueran positivos.

$$45.2+36.5=81.7$$

Segundo paso. Consideramos el opuesto de la suma que obtuvimos, y escribimos:

$$-45.2+(-36.5)=-81.7$$

Ejercicio 16. Efectúe las siguientes adiciones.

a) $-\frac{5}{8}+\left(\frac{-14}{8}\right)=\square$

b) $\frac{-32}{7}+\left(-\frac{15}{7}\right)=\square$

c) $\frac{-54}{20}+\left(\frac{-38}{20}\right)=\square$

d) $-\frac{59}{100}+\left(-\frac{75}{100}\right)=\square$

e) $-\frac{2}{5}+\left(-\frac{5}{6}\right)=\square$

f) $-\frac{2}{3}+\left(-\frac{7}{8}\right)=\square$

g) $-.93+(-.64)=\square$

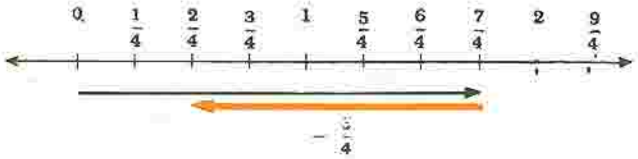
h) $-1.07+(-3.45)=\square$

i) $-76.3+(-56.8)=\square$

j) $-305.1+(-809.6)=\square$

3. Adición de un sumando positivo y uno negativo

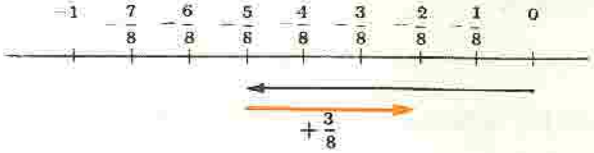
Una adición como $\frac{7}{4}+\left(-\frac{5}{4}\right)=\square$ por ejemplo, puede ilustrarse en la recta numérica de la siguiente manera:



Así vemos que $\frac{7}{4}+\left(-\frac{5}{4}\right)=\boxed{\frac{2}{4}}$

Esta adición podría corresponder a un problema de "recorridos" (como los que hemos visto anteriormente. (Note usted que el "recorrido" *positivo es mayor* que el negativo y, por esa razón, la suma obtenida es un número positivo.)

La adición $-\frac{5}{8}+\frac{3}{8}=\boxed{}$, por ejemplo, podría ilustrarse así:



Aquí vemos que $-\frac{5}{8}+\frac{3}{8}=\boxed{-\frac{2}{8}}$

(Note usted que en este caso el recorrido *negativo es mayor* que el positivo y, por ese motivo, la suma que se obtiene es un número negativo.)

Si tuviéramos fracciones con distinto denominador, para efectuar la adición primero tendríamos que sustituir esas fracciones por otras equivalentes, de igual denominador, y luego procederíamos como en los dos ejemplos anteriores. Y si los sumandos estuvieran en notación decimal, también haríamos la sustitución.

Ejercicio 17. Efectúe las adiciones usando la recta numérica y luego complete las expresiones.

a) $\frac{9}{10}+\left(-\frac{6}{10}\right)=\boxed{}$

El recorrido mayor es ________.
positivo, negativo

La suma es un número ________.
positivo, negativo

b) $-\frac{11}{3}+\frac{6}{3}=$

El recorrido mayor es ________.
positivo, negativo

La suma es un número ________.
positivo, negativo

c) $-\frac{4}{7}+\frac{12}{7}=\boxed{}$

El recorrido mayor es ________.
positivo, negativo

La suma es un número ________.
positivo, negativo

d) $\frac{3}{5}+\left(-\frac{9}{5}\right)=\boxed{}$

El recorrido mayor es ________.
positivo, negativo

La suma es un número ________.
positivo, negativo

c) $\frac{4}{5}+\left(-\frac{1}{2}\right)=\boxed{}$

El recorrido mayor es ________.
positivo, negativo

La suma es un número ________.
positivo, negativo

Los ejemplos y ejercicios anteriores sugieren un procedimiento para efectuar adiciones de racionales positivos y negativos. Veamos los pasos de este procedimiento en el siguiente ejemplo:

$$-44.5+8.3=\boxed{}$$

Primer paso. Manejamos los sumandos como si fueran positivos y buscamos su diferencia.

$$44.5-8.3=\boxed{36.2}$$

Segundo paso. Para saber si la suma será postiva o negativa, nos fijamos si el sumando que indica el recorrido mayor es positivo o negativo. En este ejemplo el recorrido mayor está indicado por el −44.5. Por lo tanto, la suma es negativa.

$$-44.5 + 8.3 = \boxed{-36.2}$$

Ejercicio 18. Efectúe las siguientes adiciones.

a) $-\frac{6}{10} + \frac{19}{10} = \boxed{}$

b) $\frac{15}{8} + \left(\frac{-6}{8}\right) = \boxed{}$

c) $\frac{16}{18} + \left(-\frac{40}{18}\right) = \boxed{}$

d) $-\frac{14}{3} + \frac{35}{3} = \boxed{}$

e) $-\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \boxed{}$

f) $\frac{5}{6} + \left(-\frac{3}{4}\right) = \boxed{}$

g) $\frac{13}{3} + \left(-\frac{51}{9}\right) = \boxed{}$

h) $-\frac{2}{7} + \frac{3}{2} = \boxed{}$

i) $.65 + (-.34) = \boxed{}$

j) $-2.08 + 4.56 = \boxed{}$

k) $5.6 + (-1.91) = \boxed{}$

l) $-6.3 + 2.25 = \boxed{}$

4. Propiedades de la adición de racionales

La adición de números racionales tiene las mismas propiedades que la adición de enteros. ¿Recuerda usted cuáles son?

En el siguiente cuadro las anotamos para que nos sirva como recordatorio:

Propiedad	Si r, s y t son números racionales, entonces,
Conmutativa	$r + s = s + r$
Asociativa	$(r + s) + t = r + (s + t)$
Existencia del elemento neutro	$r + 0 = 0 + r = r$
Existencia del inverso aditivo	$r + (-r) = 0$

Ejercicio 19. Aplique las propiedades que convengan para efectuar más fácilmente las siguientes adiciones.

a) $-\frac{5}{8} + .8 + \frac{5}{8} = \boxed{}$

b) $\frac{7}{12} + 0 + \frac{15}{17} + \left(-\frac{7}{12}\right) = \boxed{}$

c) $3.68 + 2 + \left(-\frac{9}{21}\right) + 0 + \frac{9}{21} = \boxed{}$

d) $\frac{15}{48} + \left(\frac{-10}{48}\right) + \left(\frac{-5}{48}\right) + \frac{21}{25} = \boxed{}$

e) $\frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{4}\right) + 5\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \boxed{}$

f) $.5 + (-.13) + 2.5 + .13 = \boxed{}$

g) $539.6 + (-74.78) + (-539.6) = \boxed{}$

h) $+75.2 + 57.98 + (-5) + (-57.98) = \boxed{}$

5. Sustracción de números racionales

Para indicar una sustracción de números racionales se usan expresiones como ésta:

$$\frac{5}{8} - \left(-\frac{2}{8}\right) = \boxed{}$$

Y la sustracción se ha efectuado cuando se encuentra el número que sumado con $-\frac{2}{8}$ da $\frac{5}{8}$.

Así, la expresión

$$-.6 - .9 = \boxed{}$$

indica que debemos buscar el número que sumado con .9 da la suma −. 6.

Con la expresión

$$-\frac{1}{2} - (-.2) = \boxed{}$$

se indica el problema de encontrar el número que sumado con $-.2$ ha de dar la suma $-\frac{1}{2}$.

En general, si r y s son numeros racionales, la expresión

$$r - s = \square$$

indica el problema de encontrar un número (la diferencia) que sumado con s (el sustraendo) dé la suma r (el minuendo).

Para encontrar la diferencia de dos números racionales emplearemos el mismo procedimiento que usamos en la sustracción de enteros:

> En toda sustracción de racionales, la diferencia se obtiene sumando al minuendo el opuesto del sustraendo. En símbolos,
>
> $$r - s = r + (-s)$$

Ejemplo.

$$\frac{3}{6} - \left(-\frac{5}{6}\right) = \square$$

El minuendo es $\frac{3}{6}$ y el opuesto del sustraendo es $\frac{5}{6}$: Por lo tanto,

$$\frac{3}{6} - \left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{3}{6} + \frac{5}{6} = \boxed{\frac{8}{6}}$$

Comprobación.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{diferencia}}}{\frac{8}{6}} + \left(-\underset{\substack{\uparrow \\ \text{sustraendo}}}{\frac{5}{6}}\right) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{minuendo}}}{\frac{3}{6}}$$

Ejemplo. $-.2 - .4 = \square$

Aquí el minuendo es $-.2$ y el sustraendo es $.4$. El opuesto de éste es $-.4$. Por lo tanto,

$$-.2 - .4 = -.2 + (-.4) = \boxed{-.6}$$

Comprobación.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{diferenci.}}}{-.6} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sustraendo}}}{.4} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{minuendo}}}{-.2}$$

Ejemplo.

$$-\frac{5}{7} - \left(-\frac{4}{7}\right) = \square$$

Aquí el opuesto del sustraendo es $\frac{4}{7}$: Por eso,

$$-\frac{5}{7} - \left(-\frac{4}{7}\right) = -\frac{5}{7} + \frac{4}{7} = -\frac{1}{7}$$

Comprobación.

$$-\frac{1}{7} + \left(-\frac{4}{7}\right) = -\frac{5}{7}$$

Ejercicio 20. Efectúe las sustracciones siguientes y compruébelas, como se hizo en los ejemplos anteriores.

a) $\frac{2}{8} - \left(-\frac{4}{8}\right) = \square$

b) $\frac{6}{9} - \left(-\frac{2}{9}\right) = \square$

c) $.5 - (-.4) = \square$

d) $3.5 - (-2.8) = \square$

e) $.1 - (-1.8) = \square$

f) $14.3 - (-18.4) = \square$

g) $\frac{5}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \square$

h) $\frac{7}{8} - \left(-\frac{3}{4}\right) = \square$

i) $\frac{2}{3} - \left(-\frac{3}{2}\right) = \square$

j) $\frac{7}{5} - \left(-\frac{3}{7}\right) = \square$

k) $0 - \left(-\frac{13}{15}\right) = \square$

l) $0 - (-.96) = \square$

Ejercicio 21. Efectúe las sustracciones siguientes y compruebe sus resultados.

a) $-\frac{7}{8} - \frac{5}{8} = \square$

b) $-\frac{3}{5} - \frac{8}{5} = \square$

c) $-\frac{13}{15} - \frac{9}{15} = \square$

d) $-\frac{34}{40} - \frac{18}{40} = \square$

e) $-.4 - .8 = \square$

f) $-1.6 - 2.3 = \square$

g) $-5.9 - 3.8 = \square$

h) $-30.58 - 28.31 = \square$

i) $-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} = \square$

j) $-\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \square$

k) $-\frac{5}{8} - \frac{3}{5} = \square$

l) $-\frac{7}{12} - \frac{1}{4} = \square$

m) $0 - \frac{9}{12} = \square$

n) $0 - \frac{7}{8} = \square$

Ejercicio 22. Efectúe las sustracciones siguientes y compruebe sus resultados.

a) $-\frac{1}{5} - \left(-\frac{3}{5}\right) = \square$

b) $-\frac{5}{6} - \left(-\frac{3}{6}\right) = \square$

c) $-\frac{7}{4} - \left(-\frac{5}{4}\right) = \square$

d) $-\frac{9}{10} - \left(-\frac{7}{10}\right) = \square$

e) $-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \square$

f) $-\frac{3}{4} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \square$

g) $-\frac{13}{9} - \left(-\frac{5}{4}\right) = \square$

h) $-\frac{15}{7} - \left(-\frac{3}{5}\right) = \square$

i) $-40.8 - (-73.5) = \square$

j) $-.003 - (-.2) = \square$

Como puede usted darse cuenta, *siempre es posible efectuar una* sustracción de números racionales. O, dicho de otro modo, *la diferencia de dos números racionales siempre es un número racional.* Esto se debe a que la diferencia se encuentra sumando dos racionales y la suma de dos racionales siempre es un racional.

Ejercicio 23. Aplique lo que sabe de adición y sustracción de racionales para resolver las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{3}{5} + \square = -\frac{7}{5}$

b) $\frac{3}{7} + \square = -\frac{2}{7}$

c) $\frac{4}{9} + \square = -\frac{1}{9}$

d) $.6 + \square = -.9$

e) $0 + \square = -6.8$

f) $5.4 + \square = -2.5$

g) $-\frac{1}{6} + x = \frac{5}{6}$

$x = \square$

h) $-\frac{2}{3} + n = \frac{7}{3}$

$n = \square$

i) $-\frac{3}{4} + y = \frac{1}{2}$

$y = \square$

j) $-\frac{5}{8} + b = \frac{3}{4}$

$b = \square$

k) $-6.3 + d = 4.1$

$d = \square$

l) $9.2 + e = 14.5$

$e = \square$

m) $-\frac{9}{10} + f = -\frac{15}{10}$

$f = \square$

n) $-\frac{14}{25} + h = -\frac{11}{25}$

$h = \square$

o) $-\frac{2}{3} + x = -\frac{7}{2}$

$x = \square$

p) $-\frac{14}{15} + y = -\frac{4}{5}$

$y = \square$

q) $-9.5 + n = 0$

$n = \square$

r) $13.97 + t = 0$

$t = \square$

Seguramente usted ya observó que todas las ecuaciones en el ejercicio anterior son del tipo

$$\boxed{\underset{\text{un racional}}{s} + \underset{\text{la incógnita}}{x} = \underset{\text{un racional}}{r}}$$

y que la solución se encuentra restando $r - s$.

Si las escribimos en la forma

$$\boxed{\frac{a}{b} + x = \frac{c}{d},}$$

la solución podrá indicarse así:

$$\boxed{x = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}}$$

6. PROBLEMAS

En la resolución de los siguientes problemas deberá usted aplicar sus conocimientos sobre la adición y la sustracción de números racionales. Y si usted puede establecer una ecuación con los datos de cada problema, es casi seguro que hallará más fácilmente la solución.

1. Un cuerpo estudiado en el laboratorio tenía una temperatura inicial de -8.3 grados y luego sufrió un aumento de x grados. Si la temperatura final fue de -1.2 grados, ¿cuál fue la variación que hubo?

2. El estado financiero de una empresa se había anotado como $-12\,748.00$; pero, después de efectuar un trabajo que tenía contratado, la situación cambió a $38\,915.65$. ¿Cuál fue la ganancia que logró la empresa con ese contrato?

3. Un submarino estaba situado a -93.60 metros del nivel del mar y luego empezó a ascender. Si su posición final fue de -2.50, ¿cuántos metros ascendió?

4. Un helicóptero despega de un punto que está a 980 metros del nivel del mar; se eleva 530 metros y luego desciende en otro punto que tiene 620 metros de altura sobre el nivel del mar. ¿Cuántos metros descendió ese helicóptero para llegar a su destino?

5. La era que vivimos tuvo su inicio con el nacimiento de Jesucristo. Esto es, el año cero es cuando nació Cristo. Si Pilatos nació en el año -18 y Cristo murió en el año 33, ¿qué edad tenía Pilatos al morir Cristo?

6. La temperatura inicial de un cuerpo era m. Después hubo una variación de 6.3 grados y se llegó a la temperatura de -5.8 grados. ¿Cuál fue el valor de m?

7. Un cuerpo tenía x grados de temperatura y luego sufrió una variación de -35.4 grados. Si su temperatura final fue de -6 grados, ¿cuál fue el valor de x?

8. Para efectuar el lanzamiento de un cohete espacial se inicia el conteo a las $-13\frac{1}{2}$ horas. Si dicho lanzamiento se retrasó $8\frac{1}{4}$ horas, ¿cuánto tiempo duró el conteo?

V. MULTIPLICACION Y DIVISION DE NUMEROS RACIONALES

Para multiplicar dos números racionales cualesquiera, efectuamos la operación como si los factores fueran siempre positivos, y luego decidimos si el producto ha de ser positivo o negativo tomando en consideración las siguientes reglas:

1. *Si los dos factores son positivos, entonces el producto es es positivo.*

2. *Si los dos factores son negativos, entonces el producto es positivo.*

3. *Si un factor es negativo y el otro es positivo, entonces el producto es negativo.*

Ejemplo.

a) $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = \boxed{\frac{15}{24}}$

b) $\frac{2}{3} \times \frac{16}{9} = \boxed{\frac{32}{27}}$

c) $.7 \times (.9) = \boxed{.63}$

d) $1.5 \times 2 = \boxed{3.0}$

Ejemplo.

a) $-\frac{3}{4} \times \left(-\frac{5}{6}\right) = \boxed{\frac{15}{24}}$

b) $\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{16}{9}\right) = \boxed{\frac{32}{27}}$

c) $-.7(-.9) = \boxed{.63}$

d) $(-1.5)(-2) = \boxed{3.0}$

Ejemplo.

a) $-\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = \boxed{-\frac{15}{24}}$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{16}{9}\right) = \boxed{-\frac{32}{27}}$

c) $(-.7)(.9) = \boxed{-.63}$

d) $(+1.5)(-2) = \boxed{-3.0}$

Ejercicio 24. Efectúe usted las siguientes multiplicaciones.

a) $(14)(1.5) = \boxed{}$ b) $(2.6)(.5) = \boxed{}$

c) $\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{8}{6}\right) = \boxed{}$ d) $\left(\frac{17}{30}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \boxed{}$

e) $\left(-\frac{9}{10}\right)\left(\frac{5}{3}\right) = \boxed{}$ f) $\left(\frac{14}{25}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = \boxed{}$

g) $(-4.5)(-.2) = \boxed{}$ h) $(-5.4)(.5) = \boxed{}$

i) $\left(\frac{14}{10}\right)\left(-3\right) = \boxed{}$ j) $\left(-\frac{18}{4}\right)\left(10\right) = \boxed{}$

k) $(95.2)(-4) =$ l) $(-6.8)(-2) = \boxed{}$

m) $(-5.35)(100) = \boxed{}$ n) $(-.01)(796) = \boxed{}$

o) $\left(\frac{1}{100}\right)\left(-14.6\right) = \boxed{}$ p) $(-874.5)(0) = \boxed{}$

1. Propiedades de la multiplicación de racionales

Las reglas que se utilizan en la multiplicación de racionales no fueron establecidas arbitrariamente. Se crearon de manera tal que la operación tuviera las mismas propiedades que la multiplicación de racionales no negativos. Esto es, la multiplicación efectuada de acuerdo con esas reglas tiene propiedad conmutativa, propiedad asociativa, propiedad distributiva, etcétera. Veamos algunos ejemplos de cada una de esas propiedades.

> **Propiedad conmutativa.** *Si a y b son números racionales cualesquiera, entonces al multiplicar a b obtenemos el mismo resultado que al multiplicar b · a.*
>
> $$\boxed{a \cdot b = b \cdot a}$$

Ejemplo.

$$\left(-7\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \boxed{\frac{-21}{4}}$$

y

$$\left(\frac{3}{4}\right)\left(-7\right) = \boxed{-\frac{21}{4}}$$

Esto es,

$$\boxed{\left(-7\right)\left(\frac{3}{4}\right)} = \boxed{\left(\frac{3}{4}\right)\left(-7\right)}$$

Ejemplo.

$$(-8)(-.2) = \boxed{1.6}$$

y

$$(-.2)(-8) = \boxed{1.6}$$

Esto es,

$$\boxed{(-8)(-.2)} = \boxed{(-.2)(-8)}$$

> **Propiedad asociativa.** *Si a, b y c son números racionales, entonces al multiplicar (a · b) · c obtenemos el mismo resultado que al multiplicar a · (b · c) ·*
>
> $$\boxed{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)}$$

Ejemplo. Si consideramos los factores -2, $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{5}$, vemos que

$$\boxed{\left(-2\right)\left(\frac{3}{4}\right)}\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{-6}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\right) = \boxed{\frac{-6}{20}}$$

y también

$$\left(-2\right)\boxed{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\right)} = \left(-2\right)\left(\frac{3}{20}\right) = \boxed{\frac{-6}{20}}$$

Esto es,

$$\left[\left(-2\right)\left(\frac{3}{4}\right)\right]\left(\frac{1}{5}\right) = \left(-2\right)\left[\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\right]$$

Ejemplo. Si tomamos los factores -3, $-.5$ y -4, vemos que

$$\boxed{(-3)(-.5)}(-4) = \boxed{(1.5)}(-4) = \boxed{-6)}$$

y

$$(-3)\boxed{(-.5)(-4)} = (-3)\boxed{(2.0)} = \boxed{-6}$$

Esto es,

$$[(-3)(-.5)](-4) = (-3)[(-.5)(-4)]$$

Propiedad del elemento neutro. *Si a es un número racional cualquiera, al multiplicarlo por 1 el resultado es el mismo a*

$$\boxed{1 \cdot a = a \cdot 1 = a}$$

Ejemplo.

$$(1)(-2.3) = \boxed{-2.3}$$

Ejemplo.

$$\left(-\frac{3}{4}\right)(1) = \boxed{-\frac{3}{4}}$$

Ejemplo.

$$(14.853)(1) = 14.853$$

Propiedad distributiva. *Si a, b y c son números racionales, al multiplicar a por b + c obtenemos el mismo resultado que al sumar a · b más a · c*

$$\boxed{a(b+c) = ab + ac}$$

Ejemplo. Multipliquemos $\frac{1}{2}$ por $-5 + 11$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\boxed{(-5+11)} = \frac{1}{2}\boxed{(6)} = \boxed{\frac{6}{2}}$$

Ahora apliquemos la distributividad:

$$\left(\frac{1}{2}\right)(-5+11) = \left(\frac{1}{2}\right)(-5) + \left(\frac{1}{2}\right)(11) =$$

$$= -\frac{5}{2} + \frac{11}{2} = \boxed{\frac{6}{2}}$$

Esto es,

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)(-5+11) = \left(\frac{1}{2}\right)(-5) + \left(\frac{1}{2}\right)(11)}$$

Ejemplo. Multipliquemos $\left(-\frac{2}{3}\right)$ por $\left(-\frac{1}{4} + \frac{7}{4}\right)$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{4} + \frac{7}{4}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{6}{4}\right) = \boxed{-\frac{12}{12}}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{4} + \frac{7}{4}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{7}{4}\right) =$$

$$= \frac{2}{12} + \left(-\frac{14}{12}\right) = \boxed{-\frac{12}{12}}$$

Esto es,

$$\boxed{\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{4} + \frac{7}{4}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{7}{4}\right)}$$

Ejercicio 25. Aplique la propiedad distributiva para efectuar las siguientes multiplicaciones.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4} + \frac{6}{4}\right) =$

b) $\left(\frac{3}{8}\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) =$

c) $\left(-\frac{5}{6}\right)\left[\frac{2}{3} + \left(-\frac{7}{3}\right)\right] =$

d) $(-9)(.6 + .4) =$

e) $(-.5)(-8 + 14) =$

Propiedad del cero en la multipicación. *Si* **a** *es un número racional cualquiera, al multiplicarlo por* **cero** *el resultado es* **cero**

$$\boxed{a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0}$$

Ejemplo. $(3)(-2+2) = (3)(0) =$

$$3\ (-2+2) = (3)(-2) + (3)(2)$$

$$= -6 + 6 = \boxed{0}$$

Por lo tanto, $(3)(0) = 0$

Ejemplo. $\left(-\frac{1}{2}\right)(0) = \boxed{}$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)(-4 + 4) = \frac{4}{2} + \left(-\frac{4}{2}\right) = \boxed{0}$$

Por lo tanto,

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(0\right) = \boxed{0}$$

Propiedad del elemento inverso multiplicativo. *Si r es un número racional cualquiera, al multiplicarlo por su inverso multiplicativo,* $\frac{1}{r}$, *el resultado que se obtiene es* 1. *En símbolos,*

$$\boxed{r \cdot \frac{1}{r} = 1}$$

Ejemplo.

$$\left(3\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{3} = \boxed{1}$$

$$\left(-8\right)\left(\frac{1}{-8}\right) = \frac{-8}{-8} = \boxed{1}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{6}{6} = \boxed{1}$$

$$\left(\frac{1}{18}\right)\left(18\right) = \frac{18}{18} = \boxed{1}$$

$$\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{5}{1}\right) = \frac{5}{5} = \boxed{1}$$

Observaciones. En los ejemplos anteriores podrá usted notar dos cosas:

Primera: El inverso multiplicativo de un número negativo es otro número negativo. (Pues si no fuera así, el producto no podría ser el número 1, que es positivo.)

Segunda: Cuando un número está expresado en la forma $\frac{a}{b}$, su inverso multiplicativo es $\frac{b}{a}$. (Esto es así porque el resultado de (dividir 1 entre $\frac{a}{b}$ es precisamente $\frac{b}{a}$.)

$$\boxed{\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}}$$

Ejercicio 26. Complete usted la siguiente tabla, tal como se hace en los primeros renglones.

Número dado	Inverso multiplicativo	Comprobación
$\frac{5}{9}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{5}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{45}{45} = 1$
$-\frac{15}{4}$	$-\frac{4}{15}$	$\left(-\frac{15}{4}\right)\left(-\frac{4}{15}\right) = \frac{60}{60} = 1$
-7		
	$\frac{10}{18}$	
-58		
$\frac{25}{7}$		
.4		
	$-.5$	
		$(.2)(5) = 1.0 = 1$
$-.125$		

¿Cuáles renglones de esta tabla le parecieron más difíciles? ¿Aquellos en los que se usó notación decimal? Recuerde que el inverso de un número r es el número $\frac{1}{r}$. De modo que, por ejemplo, el inverso de .4 será $\frac{1}{.4} = 2.5$. También, cuando tenga problemas para encontrar el inverso de un número dado en notación decimal, puede usted hacer un cambio de notación. Así, como $.4 = \frac{4}{10}$ su inverso será $\frac{10}{4}$, o sea, 2.5.

Ejemplo. ¿Cuál es el inverso multiplicativo de .125?

Como $.125 = \frac{125}{1\,000}$, su inverso es $\frac{1\,000}{125} = 8.$

Comprobación. $(.125)(8) = 1.000 = \boxed{1.}$

Ejemplo. ¿Cuál es el inverso multiplicativo de −.04?

En virtud de que $-.04 = -\frac{4}{100}$, su inverso es $-\frac{100}{4} = \boxed{-25.}$

Comprobación. $(-.04)(-25) = 1.00 = \boxed{1.}$

Ejercicio 27. Efectúe las siguientes multiplicaciones aplicando las propiedades que convengan en cada caso.

a) $(2) \quad -.6)(5) = \boxed{}$

b) $(-2)(14.8)(-5) = \boxed{}$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)\left(75.3\right)\left(\frac{4}{3}\right) = \boxed{}$

d) $\left(-\frac{9}{10}\right)\left(\frac{58}{3}\right)\left(-\frac{10}{9}\right) = \boxed{}$

e) $\left(\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{8}{10} + \frac{8}{10}\right) = \boxed{}$

f) $\left(-\frac{5}{9}\right)\left(-\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\right) = \boxed{}$

g) $(.65)(-.3)\left(-\frac{10}{3}\right) = \boxed{}$

h) $\left(-\frac{35}{100}\right)\left(\frac{5}{2} + \frac{-5}{2}\right) = \boxed{}$

i) $\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{10}{7}\right)\left(-45.68\right) = \boxed{}$

j) $\left(\frac{58}{5}\right)\left(76.5\right)\left(\frac{5}{58}\right) = \boxed{}$

Ejercicio 28. Efectúe las siguientes multiplicaciones.

a) $\left(13\right)\left(\frac{5}{8}\right) = \boxed{}$

b) $\left(-15\right)\left(-\frac{2}{7}\right) = \boxed{}$

c) $\left(-9\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = \boxed{}$

d) $\left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{8}{12}\right) = \boxed{}$

e) $\left(-\frac{4}{9}\right)\left(\frac{3}{12}\right) = \boxed{}$

f) $\left(-\frac{12}{15}\right)\left(-6\right) = \boxed{}$

g) $(.75)(-2) = \boxed{}$

h) $(-.04)(-35) = \boxed{}$

i) $(-.25)(-4) = \boxed{}$

j) $\left(.5\right)\left(-\frac{10}{5}\right) = \boxed{}$

2. División de números racionales

Según sabemos, efectuar una división es hallar un número (el cociente) que al multiplicarse por otro (el divisor) dé como resultado el dividendo.

Ya hemos aprendido a efectuar divisiones con enteros y con racionales no negativos. Ahora veremos cómo se efectúa la división con racionales cualesquiera. (Positivos o negativos.)

Para calcular el cociente de dos números racionales procederemos en la siguiente forma:

Primero. Dividimos como si los números fueran positivos.

Segundo. Decidimos si el cociente ha de ser positivo o negativo, tomando en consideración que el producto de ese número por el divisor debe ser igual al dividendo.

Ejemplo.

$$\frac{-\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}} = \boxed{}$$

Primero dividimos $\frac{3}{4}$ entre $\frac{2}{5}$

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \boxed{\frac{15}{8}}$$

Como el dividendo es negativo y el divisor es positivo, anotamos

$$\frac{-\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}} = \boxed{-\frac{15}{8}}$$

pues, según sabemos, el producto de un negativo (el cociente) por un positivo (el divisor) es un número negativo (el dividendo).

Comprobación.

$$\left(-\frac{15}{8}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{30}{40} = \boxed{-\frac{3}{4}}$$

Ejemplo.

$$\frac{-4.96}{-12.4} = \boxed{}$$

Dividimos como si fueran positivos los números

$$\begin{array}{r} .4 \\ 12.4\,\overline{)\,4.96} \\ 0 \end{array}$$

El cociente puede ser .4 o − .4. En este caso elegimos .4 porque sólo así tendremos que

$$(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{cociente}}}{.4})(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{divisor}}}{-12.4}) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dividendo}}}{-4.96}$$

Por lo tanto,

$$\frac{-4.96}{-12.4} = .4$$

Ejercicio 29. Encierre en un círculo el número que es el cociente en cada división.

a) $-\frac{2}{3} \div \frac{1}{5} = \boxed{}$ $\quad -\frac{3}{10} \quad \frac{10}{3} \quad -\frac{10}{3}$

b) $-\frac{6}{35} \div \frac{2}{7} = \boxed{}$ $\quad -\frac{3}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{5}{3}$

c) $\dfrac{-\frac{7}{20}}{-\frac{7}{5}} = \boxed{}$ $\quad \frac{4}{1} \quad \frac{1}{4} \quad -\frac{1}{4}$

d) $\dfrac{\frac{2}{12}}{-\frac{2}{3}} = \boxed{}$ $\quad \frac{1}{4} \quad -\frac{1}{4} \quad \frac{4}{1}$

e) $\dfrac{-.9}{.3} = \boxed{}$ $\quad -3 \quad -\frac{1}{3} \quad 3$

f) $\dfrac{-.1}{-.2} = \boxed{}$ $\quad -.5 \quad .5 \quad 5$

g) $\dfrac{.7}{-.2} = \boxed{}$ $\quad -3.5 \quad +3.5 \quad 35$

Ejercicio 30. Efectúe las siguientes divisiones.

a) $\dfrac{-\frac{7}{9}}{\frac{3}{4}} = \boxed{}$ $\qquad$ b) $\dfrac{-4}{\frac{2}{3}} = \boxed{}$ $\qquad$ c) $\dfrac{-\frac{1}{2}}{3} = \boxed{}$

d) $\dfrac{\frac{10}{7}}{-\frac{7}{10}} = \boxed{}$ $\qquad$ e) $\dfrac{\frac{4}{9}}{-\frac{1}{3}} = \boxed{}$ $\qquad$ f) $\dfrac{-\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}} = \boxed{}$

g) $\frac{6}{8} \div -\frac{1}{4} = \boxed{}$ $\qquad$ h) $-\frac{5}{12} \div \frac{2}{3} = \boxed{}$

i) $-.2 \div -\frac{1}{5} = \boxed{}$ $\qquad$ j) $-.98 \div .2 = \boxed{}$

k) $.7 \div -1.4 = \boxed{}$ $\qquad$ l) $-.75 \div -.5 = \boxed{}$

m) $\dfrac{-5}{-3} = \boxed{}$ $\qquad$ n) $\dfrac{18}{-4} = \boxed{}$ $\qquad$ o) $\dfrac{-9}{5} = \boxed{}$

Observe usted que utilizando números racionales se pueden efectuar divisiones que antes no podíamos realizar con enteros. (Ultimos tres incisos.) Esto significa que **siempre es posible efectuar una división usando números racionales,** o, dicho de otra manera *el cociente de dos números racionales siempre es un número racional.*

Ejercicio 31. Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $-\frac{5}{4} \times \square = \frac{1}{2}$

b) $-\frac{2}{3} \cdot \square = \frac{3}{5}$

c) $-\frac{10}{3} \cdot \square = \frac{3}{4}$

d) $(3.6)(\square) = -9$

e) $(5.2)(\square) = 2.6$

f) $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\square\right) = .75$

g) $8r = -4$

$r = \square$

h) $-1x = 2$

$x = \square$

i) $-\frac{3}{4}p = -\frac{3}{4}$

$p = \square$

j) $-5n = .2$

$n = \square$

k) $-2y = -1$

$y = \square$

l) $\frac{1}{5}r = -5$

$r = \square$

m) $2.8x = 1.12$

$x = \square$

n) $-3.8a = 190$

$a = \square$

Para efectuar una división de racionales también se puede utilizar la propiedad del inverso multiplicativo.

> El cociente de dos racionales r y s se obtiene multiplicando el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.
>
> $$\frac{r}{s} = r \cdot \frac{1}{s}$$

Ejemplo. $\frac{-\frac{3}{5}}{4} = \square$

Como el inverso de 4 es $\frac{1}{4}$ tenemos que

$$\frac{-\frac{3}{5}}{4} = -\frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \boxed{-\frac{3}{20}}$$

Ejemplo. $\frac{\frac{2}{3}}{-\frac{5}{4}} = \square$

El inverso de $-\frac{5}{4}$ es $-\frac{4}{5}$. Por lo tanto,

$$\frac{\frac{2}{3}}{-\frac{5}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = \boxed{-\frac{8}{15}}$$

Ejemplo. $-\frac{1}{9} \div -\frac{8}{3} = \square$

$$-\frac{1}{9} \div -\frac{8}{3} = \left(-\frac{1}{9}\right)\left(-\frac{3}{8}\right) = \boxed{\frac{3}{72}}$$

Ejercicio 32. Efectúe las siguientes divisiones multiplicando el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.

a) $\frac{-\frac{5}{6}}{\frac{4}{3}} = \square$

b) $\frac{-\frac{1}{3}}{2} = \square$

c) $\frac{\frac{3}{4}}{-5} = \square$

d) $\frac{-7}{-4} = \square$

e) $\frac{-25}{.4} = \square$

f) $\frac{-150}{-.5} = \square$

g) $\frac{-5}{-2.5} = \square$

h) $\frac{-3.5}{.5} = \square$

i) $\frac{-.2}{-4.0} = \square$

j) $\frac{-100}{-2.5} = \square$

Observación. Conviene destacar ahora que si k, a y b son racionales cualesquiera (con k y $b \neq 0$) entonces,

$$\boxed{\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}}$$

Esto puede entenderse fácilmente pues, en efecto,

$$\frac{ka}{kb} = \frac{k}{k} \cdot \frac{a}{b} = 1 \cdot \frac{a}{b} = \boxed{\frac{a}{b}}$$

¿Podría usted explicar el porqué de cada paso en la expresión anterior?

Observación. Utilizando la multiplicación y la división de números racionales, podemos ver que cuando a, b, c y d son números racionales (con b y $d \neq 0$), entonces

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si, y sólo si, } a \cdot d = b \cdot c}$$

En efecto,

si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, podemos multiplicar ambos miembros de esta igualdad por bd y obtenemos

$$\frac{a}{b} \cdot bd = \frac{c}{d} \cdot bd$$

$$\frac{a \cdot \cancel{b} \cdot d}{\cancel{b}} = \frac{c \cdot b \cdot \cancel{d}}{\cancel{d}}$$

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Inversamente,

si $a \cdot d = b \cdot c$; entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

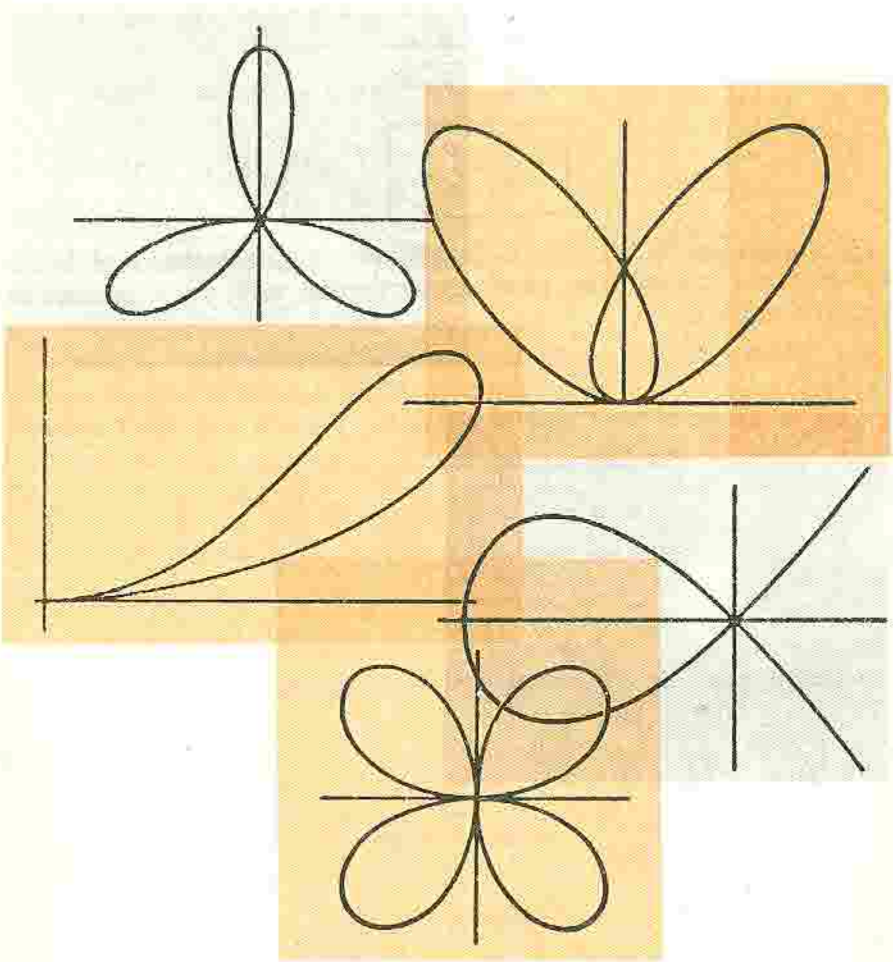
En efecto,

si $a \cdot d = b \cdot c$, podemos dividir entre $b \cdot d$ los dos miembros de la igualdad y obtener así:

$$\frac{a \cdot \cancel{d}}{b \cdot \cancel{d}} = \frac{\cancel{b} \cdot c}{\cancel{b} \cdot d}$$

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

Con esto queda justificada la afirmación que hicimos al hablar de fracciones equivalentes pues, en particular, a, b, c y d pueden ser números enteros.



Los polinomios determinan curvas algebraicas

TERCERA UNIDAD

POLINOMIOS

Al concluir el estudio de la presente unidad, el alumno:

I. Manejará expresiones algebraicas.
II. Conocerá las leyes de los exponentes.
III. Podrá efectuar operaciones con monomios y polinomios.

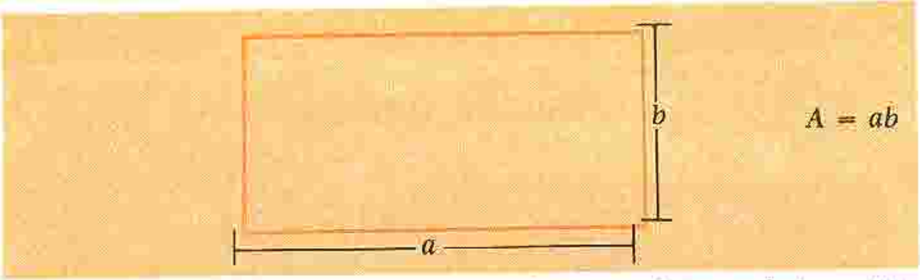
1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

En matemáticas, como en nuestra vida diaria, el uso de símbolos es de suma importancia, pues con ellos podemos expresar brevemente conceptos, fenómenos, ideas, etc.

Por ejemplo, las señales de tránsito son símbolos que nos orientan y nos indican cómo comportarnos cuando hacemos uso de las vías públicas, para no poner en peligro nuestra propia seguridad y la de quienes nos rodean.

También hemos ya usado letras para representar números. Por ejemplo, cuando escribimos $r = 2.5$ queremos decir que con la letra r denotamos al número 2.5.

En fórmulas como la del área de un rectángulo,



a y b denotan las longitudes de los lados y A denota el área del rectángulo, es decir, las letras a, b y A representan números.

Cuando en el primer curso de matemáticas hablamos de la propiedad distributiva, escribimos:

Si a, b y c son números racionales, entonces

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Aquí también, las letras a, b y c nombran números racionales.

Hemos usado también letras para nombrar conjuntos y elementos. Por ejemplo, la expresión $x \in A$ significa que el elemento x pertenece al conjunto A.

En la historia de la ciencia y, en particular, de las matemáticas, el uso de símbolos para representar objetos, marca una etapa decisiva en su desarrollo. En efecto, al aumentar el caudal de conocimientos matemáticos, el lenguaje usual se fue complicando a tal grado que llegó a constituir un freno a su futuro desenvolvimiento. De ahí la conveniencia de que nos vayamos familiarizando cada vez más con este simbolismo.

En todas las aplicaciones de las matemáticas se usan constantemente expresiones algebraicas. Por ejemplo, en física, para describir la relación que hay entre la velocidad de un cuerpo, la distancia recorrida y el tiempo, escribimos

$$v = \frac{d}{t},$$

en donde v denota la velocidad, d la distancia recorrida y t el tiempo. Aquí, las letras v, d y t representan números.

Cuando una letra o símbolo representa, en cierta situación, un elemento cualquiera, un elemento no especificado de un conjunto de números se dice a veces que tal letra o símbolo es una *variable*. Por otro lado, si la letra representa un número en especial se dice que es una *constante*.

Para lo que sigue es importante que podamos decir qué número representa una expresión formada con letras cuando conocemos qué número denota cada una de ellas.

Por ejemplo, en la expresión $A = ab$ del área del rectángulo, si a denota el número 2 y b *denota* el número 1.5, es decir, si $a = 2$ y $b = 1.5$, entonces

$$A = 2 \times 1.5 = 3$$

o sea, A representa el número 3.

Ejemplo. Si a denota el número 2, b el número 3 y c el número 4, entonces la expresión

$$a + b + c$$

denota el número $2 + 3 + 4$, es decir, el número 9. Escribimos esto así:

Si $a = 2$, $b = 3$ y $c = 4$, entonces

$$a + b + c = 2 + 3 + 4 = 9.$$

Ejemplo. Si $m = 3$, $n = 4$, $x = 5$, entonces

a) $2m + n = 2 \times 3 + 4 = 6 + 4 = 10$
b) $m^2 + n^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$
c) $mx + n = 3 \times 5 + 4 = 15 + 4 = 19$
d) $x - m = 5 - 3 = 2$
e) $n - m = 4 - 3 = 1$
f) $x^2 - n^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$
g) $\sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$
h) $\sqrt{x^2 - m^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$
i) $\dfrac{x}{m + n} = \dfrac{5}{3 + 4} = \dfrac{5}{7}$

Expresiones como las anteriores reciben con frecuencia el nombre de **expresiones algebraicas** y se acostumbra decir que encontrar el número que representan es **encontrar su valor.**

Ejercicio 1. Suponiendo que $a = 0$, $b = 5$, $c = 10$ y $d = 15$ encuentre los valores de las siguientes expresiones algebraicas:

a) $a + b + c + d$
b) $2a + 3b + c + 20$
c) abc
d) $bcd + bd$
e) $b^2 + d$
f) $3b^2 + 2c$
g) $b^2 + c^2 + d$
h) $b - a$

i) $c - b$
j) $b^2 - d$
k) $c - 2b$
l) $2c - d$
m) $d^2 - 6c$
n) $c^2 - bd$
o) $b^2 + b + 1$
p) $2c^2 + 3c + 100$
q) $3d^2 + 2d + 5$
r) $3a^2 + 2a + 1$
s) $\dfrac{b + d}{c}$
t) $\dfrac{a + b + c}{d}$
u) $\dfrac{b}{c} + \dfrac{b}{d}$
v) $\dfrac{b + b}{c + d}$

Ya en el primer curso de matemáticas y en la unidad anterior empezamos a emplear paréntesis. Observe cuidadosamente el uso de los paréntesis en el siguiente ejemplo para después resolver los ejercicios que siguen.

Ejemplo. Si $a = 7$, $b = 1$ y $c = 6$, entonces

a) $3(a + 1) = 3(7 + 1) = 3(8) = 24$
b) $a(b + c) = 7(1 + 6) = 7(7) = 49$
c) $ab + c = 7 \times 1 + 6 = 7 + 6 = 13$
d) $3(b + 2) = 3(1 + 2) = 3(3) = 9$
e) $3b + 2 = 3 \times 1 + 2 = 3 + 2 = 5$
f) $(a + b)^2 = (7 + 1)^2 = 8^2 = 64$
g) $(a - 2)(c - 3) = (7 - 2)(6 - 3) = 5 \times 3 = 15$
h) $(a - c)\ b = (7 - 6) \times 1 = 1 \times 1 = 1$
i) $(a^2 + b^2)c = (7^2 + 1^2) \times 6 = (49 + 1) \times 6 = 50 \times 6 = 300$
j) $(a^2 - b^2)(c^2 + 1) = (7^2 - 1^2)(6^2 + 1) =$
$(49 - 1)(36 + 1) = 48 \times 37 = 1\ 776$

Ejercicio 2. Suponiendo que $x = 2$, $y = \dfrac{1}{2}$, $z = 3$, $t = \dfrac{1}{3}$ encuentre los valores de las siguientes expresiones:

a) $xy + zt$
b) $zy - zt$
c) $x^2 + 2y + z^2 + 3t$
d) $2x + 4y^2 + 3z + 9t^2$
e) $(x + y)(z + t)$
f) $(x - y)(z - t)$
g) $(x + z)(y + t)$
h) $(x + z)(y - t)$
i) $(x + y)^2 + (z + t)^2$
j) $\sqrt{4x^2 + z^2}$
k) $y^2 + t^3$
l) $(x - y)^2 + (z - t)^2$

Ejercicio 3.

a) Encuentre a, si $a^2 = b^2 + c^2$, $b = 3$ y $c = 4$.
b) Encuentre C, si $C = 2\pi r$, $\pi = 3.14$ y $r = 5$.

c) Encuentre D, si $D = \pi r^2$, $\pi = 3.14$ y $r = 5$.
d) Encuentre V, si $V = \pi r^2 h$, $\pi = 3.14$, $r = 5$, $h = 10$.
e) Encuentre A, si $A = \dfrac{a + b}{2} h$, $a = 3$, $b = 5$ y $h = 2$.
f) Encuentre V, si $V = \dfrac{4}{3} \pi r^3$ si $\pi = 3.14$, $r = 4$.
g) Encuentre S, si $S = 4\pi r^2$ si $\pi = 3.14$, $r = 4$.

Ejercicio 4. Calcule el área de cada rectángulo para los valores de b y de a que se dan.

b	5	3.7	$\frac{7}{6}$	.48
a	4	.8	$\frac{8}{5}$	.79
A				

$\boxed{A = b \cdot a}$

Ejercicio 5. Encuentre el área de cada uno de los trapecios cuyos datos se anotan en la tabla.

B	12	8	$\frac{7}{6}$
b	6	6	$\frac{4}{6}$
h	4	7	$\frac{3}{9}$
A			

$\boxed{A = \dfrac{(B + b)\,h}{2}}$

Ejercicio 5'. Para "transformar" grados Farenheit a grados centígrados se aplica la siguiente fórmula:

$$°C = \frac{5}{9}(°F - 32)$$

Encuentre los °C que corresponden a los datos de la siguiente tabla.

°F	0	32	−13	−40
°C				

Con frecuencia es necesario usar paréntesis en expresiones que están dentro de paréntesis; por ejemplo, si $x = -2$, y $y = -3$, la expresión $x(x + y)$ se escribe

$$(-2)(-2 + (-3)).$$

A veces, por claridad, se usan paréntesis rectangulares. Por ejemplo, la expresión anterior se escribe

$$(-2)[-2 + (-3)].$$

Observe cuidadosamente el uso de los paréntesis en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Si $a = -7$, $b = -1$ y $c = -6$, entonces

a) $3(a + 1) = 3(-7 + 1) = 3(-6) = -18$
b) $a(b + c) = (-7)[-1 + (-6)] = (-7)(-7) = 49$
c) $ab + c = (-7)(-1) + (-6) = 7 + (-6) = 1$
d) $3(b + 2) = 3(-1 + 2) = 3(1) = 3$
e) $3b + 2 = 3(-1) + 2 = -3 + 2 = -1$
f) $(a - b)^2 = [-7 - (-1)]^2 = (-7 + 1)^2 = (-6)^2 = 36$
g) $(a - 2)(c - 3) = (-7 - 2)(-6 - 3) = (-9)(-9) = 81$
h) $(a - c)\,b = [-7 - (-6)](-1) = (-7 + 6)(-1) = (-1)(-1) = 1$

Ejercicio 6. Si $a = -3$, $b = -2$, $c = \frac{1}{2}$, $d = -\frac{2}{3}$, encuentre los valores de las siguientes expresiones, como se muestra en los primeros incisos,

a) $a^2 = (-3)^2 = (-3)(-3) = 9$
b) $-a^2 = -(-3)^2 = -9$
c) $a + 3 = -3 + 3 = 0$
d) $a - 3 = -3 - 3 = -6$
e) $10 - a = 10 - (-3) = 10 + 3 = 13$
f) $a + b = -3 + (-2) = -5$
g) $ab = (-3)(-2) = 6$

h) b^2
i) bc
j) $6d$
k) c^2
l) $6cd$
ll) $a^2 + b^2$
m) $3(c + a)$
n) $a(3b - b^2)$
o) $\dfrac{3a^2 - b^2}{a}$
p) $-b^2$
q) $(-b)^2$
r) $\dfrac{a^3}{b}$
s) $\dfrac{c}{d}$
t) $\dfrac{a}{d} + 1$
u) $\dfrac{b^2}{c} - 2$
v) $\dfrac{5(b^2 - a^3)}{c}$

2. POLINOMIOS

Polinomios

Entre las expresiones algebraicas que con más frecuencia se utilizan en el estudio y las aplicaciones de las matemáticas, figuran los polinomios. Estos son expresiones como las siguientes:

$5x^2 - 2x + 3$
$7x^{10} + 8x^7 - 5x^2 + 3$
$ax^2 + bx + c$
$x^2 + 1$

$2z^9 + 5$
$-3z + 1$
z^5
$z^2 + z + 1$

$27a^3 + 3a$
$p^3 + p^2 + p + 1$
$3s^2 - 5s + 9$
$2s^9 + 23s + 4.$

A veces, para precisar, se habla de polinomios en x (como los de la primera columna), polinomios en z (como los de la segunda) o bien polinomios en a, en p o en s (como los de la tercera columna) o en cualquier símbolo que se use. Conviene observar que aquí, como en las unidades anteriores, las letras representan números racionales.

Es también frecuente referirse a un polimonio en una letra, digamos en x, como a un *polinomio en la variable* x o bien, a un *polinomio en la indeterminada* x.

Algunos polimonios reciben nombres especiales. A polinomios como los siguientes

$$3x^5 \qquad 2z \qquad 23a^7 \qquad 9 \qquad 50y^{10}$$

se les llama **monomios.**

A los polinomios que constan de dos sumandos (o como se acostumbra decir, de dos **términos**) se les llama **binomios** como, por ejemplo,

$$3x^5 + 60 \qquad 2x^6 + 19 \qquad t^5 - t \qquad z^{19} - z^{17}$$

En un polinomio, al término en el que no figura la variable se le acostumbra llamar **término independiente** o **término libre**. Por ejemplo en el binomio $2x^2 + 5$, el término libre es 5; en el trinomio $4a^2 + 2a - 7$ el término libre es -7; en el polinomio $x^5 + x^3 + 2x^2 + x$ el término libre es 0.

$$2x^2 + 5 \qquad\qquad x^5 + x^3 + 2x^2 + x + 0$$

término libre

Al número que aparece multiplicando a las potencias de la variable se le acostumbra dar el nombre de **coeficiente**. Por ejemplo, en el polinomio

$$7x^6 + 5x^4 - 3x^2 - 2x - 15$$

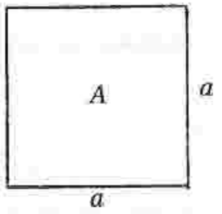
el coeficiente de x^6 es 7, el de x^4 es 5, el de x^2 es -3 y el de x es -2. (El coeficiente de x^0, es decir, de 1, es -15).

Ejercicio 7. De los siguientes polinomios indique cuáles son monomios, binomios o trinomios, e indique también los términos libres y los coeficientes.

a) $5x^3 - 3x + 1$
b) $6x^2 - 3x$
c) $a^3 + 2a^2 + a - 1$
d) 7
e) $4y^2 - 3y + 1$
f) x
g) $\frac{3}{4}x^9 - x^6 - \frac{5}{7}$
h) $100t^{10}$

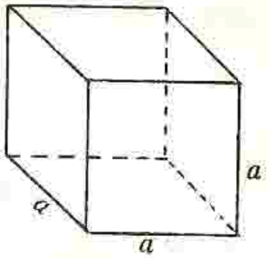
Potencias

Cuando deseamos calcular el área de un cuadrado que mide a metros por lado, lo hacemos multiplicando la medida del lado por sí mismo. Esto es,



$$A = a \cdot a$$

Para calcular el volumen de un cubo que mide a unidades por lado, lo hacemos multiplicando el largo por el ancho por el alto. Esto es,



$$V = a \cdot a \cdot a$$

Frecuentemente se presenta la necesidad de multiplicar un número por sí mismo varias veces, como en el caso del área del cuadrado o el volumen del cubo. Cuando nos ocurra esto emplearemos la notación exponencial para evitarnos el escribir todos los factores. Por ejemplo, el producto $a \cdot a$ lo escribiremos simplemente como a^2 (que se lee: "a al cuadrado"). Esto es,

$$a \cdot a = a^2$$

El producto $a \cdot a \cdot a$ lo escribiremos como a^3 (que se lee: "a al cubo"). Esto es,

$$a \cdot a \cdot a = a^3$$

Recuerde usted que en la expresión a^2 el exponente es 2, la base es a y la potencia es a^2; en la expresión a^3, el exponente es 3, la base es a y la potencia es a^3.

Ejercicio 8. Exprese en notación exponencial cada uno de los siguientes productos y señale cuál es la base, el exponente y la potencia.

	Base	Exponente	Potencia
a) $7 \cdot 7 \cdot 7 =$ ☐			
b) $(2.7)(2.7)(2.7)(2.7) =$ ☐			
c) $(-4)(-4) =$ ☐			
d) $\underbrace{m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{12 \text{ factores}} =$ ☐			

	Base	Exponente
e) $\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ factores}} =$		
f) $\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) =$		
g) $\underbrace{\left(-\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{5}{4}\right)\cdots\left(-\frac{5}{4}\right)}_{b \text{ factores}} =$		
h) $(x-1)(x-1)(x-1) =$		
i) $\underbrace{(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{n \text{ factores}} =$		

Ejercicio 9. Escriba cada potencia como un producto de factores iguales y señale cuál es la base y cuál es el exponente.

	Base	Exponente
a) $(-6.3)^3 =$		
b) $(12.7)^{17} = \underbrace{\qquad\qquad}_{17 \text{ factores}}$		
c) $y^2 =$		
d) $t^5 =$		
e) $r^{38} = \underbrace{\qquad\qquad}$		
f) $a^m = \underbrace{\qquad\qquad}$		
g) $(y-7)^3 =$		

En general se da la siguiente definición:

> *Si a es un número racional y n es un número natural mayor que 1, entonces*
>
> $$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

Por la forma en que se definió a^n es necesario suponer que el exponente n es mayor que 1, pues n es el número de factores. Por lo tanto, expresiones como a^1 y a^0 no quedan incluidas en la definición anterior.

Sin embargo, más adelante se verá que es conveniente definir a^1 y a^0 de la siguiente manera:

DEFINICION. *Si a es un número racional, definimos*

$$a^1 = a$$

y si $a \neq 0$ definimos también

$$a^0 = 1.$$

Así, por ejemplo,

$25^1 = 25$ $\qquad (-8)^1 = -8$ $\qquad \left(\frac{1}{1\,000}\right)^0 = 1$

$\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$ $\qquad (6.5)^0 = 1$ $\qquad x^0 = 1 \ (\text{si } x \neq 0)$

$0^1 = 0$ $\qquad y^1 = y$

Grado de un polinomio

En un polinomio como por ejemplo

$$3x^5 - 2x^3 + 3x - 5$$

se dice que el grado del término $3x^5$ es 5, el grado de $-2x^3$ es 3, el de $3x$ es 1 y el de -5 es 0.

Y se dice también que *el grado del polinomio* es 5, es decir, *es el máximo de los grados de sus términos.*

Ejercicio 10. En cada uno de los siguientes polinomios indique el grado de cada término y el grado del polinomio.

a) $3y^{10} - 2y^{5} - 7y^2 + 1$

b) $2a^3 - 7a^5 + 2a$

c) $9x - 9$

d) x

e) $y^2 - y^4$

f) $1 + x + x^2 + x^3$

g) 7

h) $y^4 - 1$

Para manejar los polinomios más cómodamente es conveniente escribirlos a veces de tal manera que el primer término sea el de mayor grado, el segundo, el de grado inmediato menor y así sucesivamente. Por ejemplo, el polinomio en x

$$-x^2 + 2x^3 - 15x + 9x^4 + 1$$

conviene a veces escribirlo así:

$$9x^4 + 2x^3 - x^2 - 15x + 1.$$

También puede resultar conveniente escribirlo en "orden" inverso:

$$1 - 15x - x^2 + 2x^3 + 9x^4.$$

Ejercicio 11. Escriba los siguientes polinomios de tal manera que los grados de sus términos vayan de mayor a menor.

a) $15x + 16 + 23x^2 + 4x^3$

b) $8a - 9b^2 - 24 + 3b^3$

c) $6y^2 - 12y^4 + 9 - 4y$

d) $-3a - 1 + 3a^2 + a^3$

e) $4 - 4x + x^2$

f) $12a + a^2 + 36$

g) $t^2 - 5t^4 + t^3 - 12$

h) $-x^3 + 17x + 16x^4 + 9$

i) $-15p^2 - 19p^3 + 36p^4 - 19$

Valor numérico

Sea $x^2 - 7x + 12$ un polinomio. Si x toma un cierto valor, por ejemplo 5, para saber qué número representa el polinomio sustituimos la variable por el 5. Esto es,

$$x^2 - 7x + 12 = 5^2 - 7(5) + 12 = 25 - 35 + 12 = 2;$$

así vemos que el polinomio representa al número 2 cuando la x representa al 5.

Si en el mismo polinomio sustituimos la x por el número -4, esto es, si $x = -4$, entonces

$$x^2 - 7x + 12 = (-4)^2 - 7(-4) + 12 = 16 + 28 + 12 = 56$$

y el polimonio representa al número 56.

Si $x = 3$, entonces

$$x^2 - 7x + 12 = 3^2 - 7(3) + 12 = 9 - 21 + 12 = 0$$

y el polinomio representa al cero. Esto es,

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \qquad \text{cuando } x = 3.$$

Ejercicio 12. Calcule el número que representa cada polinomio para los valores propuestos.

a)

x	$x^2 - 2x + 1$
0	
1	
−1	
2	
−2	

b)

x	$3x - 5$
0	
−3	
3	
5	
−5	

c)

y	$-4y + 3$
0	
2	
−2	
$\frac{3}{4}$	
−1	

d)

t	$t^2 + 8t + 15$
0	
−3	
3	
−5	
5	

e)

x	$2x - 8$
0	
2	
−2	
4	
−4	

f)

a	$a^2 - 6a + 9$
0	
1	
−1	
3	
−3	

3. LEYES DE LOS EXPONENTES

En esta sección veremos tres propiedades a las que a veces se les da el nombre de leyes de los exponentes.

Productos de potencias

Empecemos con la siguiente pregunta: ¿Se podrá expresar el producto $5^2 \cdot 5^4$ como una potencia de 5?

Es fácil ver que sí. En efecto, por definición de potencia sabemos que

$5^2 = 5 \cdot 5$ (2 factores)
$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5.$ (4 factores)

Por lo tanto,

$$5^2 \cdot 5^4 = \underbrace{\underbrace{5 \cdot 5}_{\text{2 fact.}} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{\text{4 fact.}}}_{\text{6 factores}} = 5^6.$$

Veamos otros ejemplos.

$$x^3 \cdot x^2 = \underbrace{\underbrace{x \cdot x \cdot x}_{\text{3 fact.}} \cdot \underbrace{x \cdot x}_{\text{2 fact.}}}_{3 + 2 = 5 \text{ factores}} = x^{3+2} = x^5.$$

De la misma manera tenemos que

$$y^{38} \cdot y^{17} = \underbrace{\underbrace{y \cdot y \ldots y}_{\text{38 fact.}} \cdot \underbrace{y \cdot y \ldots y}_{\text{17 fact.}}}_{38 + 17 \text{ factores}} = y^{38+17} = y^{55}.$$

Ejercicio 13. Como se hizo en los tres ejemplos anteriores exprese cada producto de potencias como una potencia.

a) $7^3 \cdot 7^5$
b) $a^4 \cdot a^3$
c) $x^8 \cdot x^3$
d) $6^{12} \cdot 6^7$
e) $b^{14}b^9$
f) $5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^4$
g) $a^4 \cdot a^{10} \cdot a^{15}$
h) $(a + b)^6(a + b)^3$

En los ejemplos y en el ejercicio anterior podemos observar que el exponente del producto es la suma de los exponentes de los factores. Es decir,

> *Si a es un número racional y m y n son números naturales, entonces*
>
> $$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Como en los ejemplos, es fácil ver que esto es así:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \ldots a}_{m \text{ factores}} \cdot \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ factores}}}_{m + n \text{ factores}} = a^{m+n}$$

Ejercicio 14. Utilice la propiedad anterior para simplificar las expresiones siguientes.

a) $x^5 \cdot x^{10} = x^{5+10} = x^{15}$
b) $a^{10} \cdot a = a^{10} \cdot a^1 = a^{10+1} = a^{11}$
c) $a^n \cdot a^2 = a^{n+2}$
d) $x^{27} \cdot x^3 = \boxed{}$
e) $z^{18} \cdot z^7 = \boxed{}$
f) $17^{21} \cdot 17^{21} \cdot 17^{21} = \boxed{}$
g) $p^r \cdot p^s = \boxed{}$
h) $2^5 \cdot 2^2 \cdot 2^7 = \boxed{}$
i) $a^8 \cdot a = \boxed{}$
j) $a^n \cdot a = \boxed{}$

Potencia de una potencia

Consideremos la expresión $(4^2)^3$, es decir, el cubo de 4 al cuadrado. Tenemos que

$$(4^2)^3 = \underbrace{4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2}_{3 \text{ factores}} = 4^{2+2+2} = 4^{2 \cdot 3} = 4^6.$$

(El hecho de que $4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 = 4^{2+2+2}$ se sigue de la propiedad que demostramos en el párrafo anterior.)

Veamos otros ejemplos parecidos.

$$(x^7)^{12} = \underbrace{x^7 \cdot x^7 \ldots x^7}_{12 \text{ factores}} = x^{\overbrace{7+7+\ldots+7}^{12 \text{ sumandos}}} = x^{7 \cdot 12} = x^{84}.$$

En general,

> *Si a es un número racional y m y n son números naturales, entonces*
>
> $$(a^m)^n = a^{mn}.$$

En efecto, como en los ejemplos anteriores, tenemos que

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \ldots a^m}_{n \text{ veces}} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ sumandos}}} = a^{mn}.$$

Ejercicio 15. Use la propiedad $(a^m)^n = a^{mn}$ para simplificar las siguientes potencias.

a) $(2^3)^5$

b) $(b^2)^3$

c) $(a^2)^8$

d) $(y^3)^n$

e) $(m^5)^s$

f) $(7^5)^6$

g) $(a^2)^n$

h) $(a^n)^2$

i) $((a+b)^7)^2$

j) $((x+y)^2)^n$

Potencia de un producto

Otra propiedad de los exponentes se ilustra en los siguientes ejemplos.

$$(4a)^3 = (4a)(4a)(4a) = (4 \cdot 4 \cdot 4)(a \cdot a \cdot a) = 4^3a^3.$$

O sea,

$$(4a)^3 = 4^3a^3.$$

$$(3a)^{20} = \underbrace{(3a) \cdot (3a) \ldots (3a)}_{20 \text{ factores}} = \underbrace{(3 \cdot 3 \ldots 3)}_{20 \text{ factores}} \underbrace{(a \cdot a \ldots a)}_{20 \text{ factores}} = 3^{20}a^{20},$$

esto es,

$$(3a)^{20} = 3^{20}a^{20}.$$

En general,

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)(ab)\ldots(ab)}_{n \text{ factores}} = \underbrace{(a \cdot a \ldots a)}_{n \text{ factores}} \underbrace{(b \cdot b \ldots b)}_{n \text{ factores}} = a^nb^n.$$

> *Si a y b son números racionales y n es un número natural, entonces*
>
> $$(ab)^n = a^nb^n.$$

Ejercicio 16. Use la propiedad $(ab)^n = a^nb^n$ para sustituir cada potencia por un producto de potencias.

a) $(2x)^6 =$

b) $(-4m)^3 =$

c) $(ab)^6 =$

d) $[(a+b)z]^5 =$

e) $(8xy)^{12} =$

f) $(rst)^m =$

g) $(-2x^3)^2 =$

h) $[2(x+y)]^3 =$

i) $[(x-y)(x+y)]^2 =$

j) $[(2x+1)(2x-1)]^n$

Cociente de potencias

Consideremos ahora expresiones como las siguientes:

$$\frac{x^5}{x^2} \quad \frac{x^2}{x} \quad \frac{a^7}{a} \quad \frac{b^{25}}{b^7}$$

Veremos ahora que estos cocientes se pueden expresar como una simple potencia. Empecemos con ejemplos.

Ejemplo.

a) $\frac{7^5}{7^3} = 7^2$ porque $7^2 \cdot 7^3 = 7^5$

b) $\frac{(-6)^8}{(-6)^2} = (-6)^6$ porque $(-6)^6(-6)^2 = (-6)^8$

c) $\frac{2.5^{10}}{2.5^8} = 2.5^2$ porque $(2.5^2)(2.5^8) = 2.5^{10}$

d) $\frac{a^7}{a^2} = a^5$ porque $a^5 \cdot a^2 = a^7$.

Ejercicio 17. Tal como se hizo en el ejemplo, efectúe usted las siguientes divisiones. (Las letras representan números diferentes de cero.)

a) $\frac{6^4}{6^2} = \boxed{}$ porque $\boxed{}$

b) $\frac{(-12)^5}{(-12)^2} = \boxed{}$ porque $\boxed{}$

c) $\frac{(13.4)^7}{(13.4)^5} = \boxed{}$ porque $\boxed{}$

d) $\frac{(-14.5)^8}{(-14.5)^6} = \boxed{}$ porque $\boxed{}$

e) $\frac{n^{10}}{n^6} = \boxed{}$ porque $\boxed{}$

f) $\frac{r^{30}}{r^{22}} = \boxed{}$ porque $\boxed{}$

g) $\frac{\pi^9}{\pi^3} = \boxed{}$ porque $\boxed{}$

Si analiza usted con cuidado los resultados de las divisiones anteriores se dará cuenta que en todas ellas el cociente se puede obtener aplicando la siguiente regla:

Si a es un número distinto de cero, entonces

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

La demostración es fácil. En efecto,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ porque } a^{m-n}a^n = a^{m-n+n} = a^m.$$

Ejemplo.

a) $\frac{7^5}{7^2} = 7^{5-2} = \boxed{7^3}$

b) $\frac{(a-b)^4}{(a-b)^2} = (a-b)^{4-2} = \boxed{(a-b)^2}$

c) $\frac{(-3.2)^8}{(-3.2)^3} = (-3.2)^{8-3} = \boxed{(-3.2)^5}$

Ejercicio 18. Aplique la regla anterior y exprese cada cociente en notación exponencial. (Las letras representan números distintos de cero.)

a) $\frac{4^5}{4^2} = \boxed{}$

b) $\frac{18^9}{18^7} = \boxed{}$

c) $\frac{(-10)^6}{(-10)} = \boxed{}$

d) $\frac{(-2.5)^4}{(-2.5)^3} = \boxed{}$

e) $\frac{n^8}{n^7} = \boxed{}$

f) $\frac{(3x)^{10}}{(3x)^7} = \boxed{}$

g) $\frac{6^7}{6^8} = \boxed{}$

h) $\frac{x^a}{x^b} = \boxed{}$

i) $\frac{(n+8)^{10}}{(n+8)^9} = \boxed{}$

j) $\frac{(x+y)^4}{(y+x)^3} = \boxed{}$

Exponentes enteros*

En el párrafo anterior hemos visto que si a es un número racional distinto de cero y m, n son números naturales, entonces

---

* La omisión de este párrafo no afecta para nada el resto del curso.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

en el caso que $m > n$.

Pero si, como hemos convenido, $a^0 = 1$, la fórmula anterior vale también para $m = n$. En efecto, por un lado tenemos que

$$\frac{a^m}{a^m} = 1$$

y por otro lado,

$$a^{m-m} = a^0 = 1.$$

Por lo tanto una vez aceptada la definición $a^0 = 1$ vemos que la fórmula $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ vale también en el caso en que $m = n$.

¿Qué ocurre con expresiones del tipo $\frac{a^m}{a^n}$ cuando $m < n$? Veamos varios ejemplos.

Ejemplo.

a) En la expresión $\frac{x^2}{x^5}$, $2 < 5$ por lo que está en el caso que queremos examinar. Tenemos que

$$\frac{x^2}{x^5} = \frac{1\cdot x^2}{x^3\cdot x^2} = \frac{1}{x^3}\cdot\frac{x^2}{x^2} = \frac{1}{x^3}\cdot 1 = \frac{1}{x^3}.$$

Es decir,

$$\frac{x^2}{x^5} = \frac{1}{x^3}.$$

b) En forma análoga,

$$\frac{a^3}{a^8} = \frac{1\cdot a^3}{a^5\cdot a^3} = \frac{1}{a^5}\cdot\frac{a^3}{a^3} = \frac{1}{a^5}\cdot 1 = \frac{1}{a^5},$$

es decir,

$$\frac{a^3}{a^8} = \frac{1}{a^5}$$

c)

$$\frac{a^6}{a^7} = \frac{1\cdot a^6}{a\cdot a^6} = \frac{1}{a}\cdot\frac{a^6}{a^6} = \frac{1}{a}\cdot 1 = \frac{1}{a}$$

Veremos ahora que el uso de exponentes negativos permite aplicar la regla $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ aun en el caso en que $m < n$. En efecto, *si definimos*

$$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

vemos que

$$\frac{x^2}{x^5} = x^{-3} = x^{2-5}.$$

En el caso b) del ejemplo, *si adoptamos la notación*

$$a^{-5} = \frac{1}{a^5}$$

vemos que

$$\frac{a^3}{a^8} = a^{-5} = a^{3-8}$$

En el caso c), si aceptamos la notación $a^{-1} = \frac{1}{a}$ vemos que

$$\frac{a^6}{a^7} = a^{-1} = a^{6-7}$$

Es decir, en los tres ejemplos podemos observar que si adoptamos la notación $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ podemos aplicar la regla $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ aun cuando $m < n$.

Por esto se acepta la siguiente definición:

DEFINICION. *Si a es un número racional distinto de cero y n un número natural, entonces*

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Por ejemplo,

$$2^{-5} = \frac{1}{2^5},\ 3^{-1} = \frac{1}{3},\ a^{-7} = \frac{1}{a^7},\ 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0.001.$$

Al aceptar esta notación resulta que la regla $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ es válida no sólo en los casos $m > n$ y $m = n$, sino también en el caso $m < n$, es decir, vale para m y n enteros arbitrarios.

Pero resulta que, al adoptar la notación $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ no sólo vale la regla que acabamos de mencionar, sino que también valen las demás reglas de los exponentes que se han estudiado para el caso de exponentes positivos. En efecto, se puede demostrar, aunque aquí no lo haremos, que:

> Si a y b son números racionales distintos de cero y m y n son *números enteros cualesquiera*, entonces
>
> $a^m a^n = a^{m+n}$ $\qquad$ $(a^m)^n = a^{mn}$
>
> $(ab)^n = a^n b^n$ $\qquad$ $\frac{a^m}{b^n} = a^{m-n}$

Ejercicio 19. Aplique las propiedades anteriores a las expresiones que se dan.

a) $(ab)^{-3} = a^{-3}b^{-3}$

b) $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = 0.0001$

c) $\frac{a^{-2}}{a^{-3}} = a^{-2-(-3)} = a^1 = a$

d) $a^5a^{-5} = a^{5-5} = a^0 = 1$

e) $(ab)^{-7} =$

f) $a^{-2}a^2 =$

g) $(10^{-1})^3 =$

h) $(a^{-3})^{-2} =$

4. OPERACIONES CON POLINOMIOS

En lo que sigue estudiaremos algunas operaciones entre polinomios. Conviene recordar que los polinomios representan números, así que la suma, producto, etc., de polinomios será la suma, el producto, etc., de los números que éstos representan. Por consiguiente es posible utilizar todas las propiedades que hemos estudiado acerca de las operaciones entre números.

Recordemos algunas de éstas.

Propiedad conmutativa (de la adición y de la multiplicación). *Si a y b son números racionales, entonces*

$$\boxed{a + b = b + a} \; y \; \boxed{ab = ba.}$$

Propiedad asociativa (de la adición y de la multiplicación).

Si a, b y c son números racionales, entonces

$$\boxed{(a + b) + c = a + (b + c)} \; y \; \boxed{(ab)c = a(bc).}$$

(Recordemos aquí que, gracias a esta propiedad, podemos escribir sumas y productos de tres o más números omitiendo los paréntesis, como, por ejemplo, $1 + 7 + 3 + 10$, $12 \times 5 \times 9 \times 4 \times 10$.)

Existencia de elemento neutro (aditivo y multiplicativo).

Para la adición, 0 es el elemento neutro; es decir, se tiene que

$$\boxed{a + 0 = a}$$

para todo número racional a.

Análogamente, 1 *es el elemento neutro para la multiplicación;* es decir, para cualquier número racional a se tiene que

$$\boxed{a \cdot 1 = a.}$$

Propiedad distributiva (de la multiplicación con respecto a la adición).

Si a, b y c son números racionales, entonces

$$\boxed{a(b + c) = ab + ac}$$

(Recuerde usted que $a(b + c)$, según la convención del uso de paréntesis, significa el producto de a por el número $b + c$. Por ejemplo, $2(5 + 7) = 2 \times 12 = 24$, lo cual es distinto, en general, de $ab + c$; para el caso anterior tendríamos $2 \times 5 + 7 = 10 + 7 = 17$.)

Debido a la propiedad conmutativa, las propiedades anteriores permiten afirmar que si a, b y c son números racionales, entonces

$$\boxed{0 + a = a,}$$

$$\boxed{1 \cdot a = a,}$$

$$\boxed{(a + b)c = ac + bc.}$$

Existencia de inversos (aditivo y multiplicativo)

Para todo número racional a existe un número racional (que se denota $-a$) *tal que*

$$\boxed{a + (-a) = 0.}$$

($-a$ se llama el **inverso aditivo** de a.)

Si a es un racional distinto de 0, existe un racional (que se denota $\frac{1}{a}$) *tal que*

$$\boxed{a\,\frac{1}{a} = 1.}$$

$\left(\frac{1}{a}\right.$ se llama el **inverso multiplicativo** de $\left.a.\right)$

Adición de polinomios

La adición de polinomios es una operación que se efectúa muy fácilmente. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo.

a) Para sumar los monomios $4x^3$ y $8x^3$ podemos proceder así:

$4x^3 + 8x^3 = (4 + 8)x^3$ (por la propiedad distributiva)
$= 12x^3.$

b) Para sumar los monomios del mismo grado

$$6y \quad -4y \quad 3y$$

podemos aplicar la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned} 6y + (-4y) + 3y &= 6y + (-4)y + 3y \\ &= [6 + (-4) + 3]y = 5y. \end{aligned}$$

c) $x + x = 1 \cdot x + 1 \cdot x = (1 + 1)x = 2x$
d) $x + 2x = 1 \cdot x + 2x = (1 + 2)x = 3x$

Ejemplo.

a) Para sumar los polinomios

$5x^2 + 2x + 1$ y $3x + 5$

podemos proceder como sigue:

$(5x^2 + 2x + 1) + (3x + 5) = 5x^2 + (2x + 3x) + (1 + 5) =$
$5x^2 + (2 + 3)x + 6 = 5x^2 + 5x + 6.$

Observe que en el primer paso usamos la propiedad conmutativa y asociativa y en el segundo, la distributiva.

b) Para sumar los polinomios

$$-3x^2 + 2x - 1 \text{ y } -3x + 4$$

podemos proceder como sigue:

$$\begin{aligned} (-3x^2 + 2x - 1) + (-3x + 4) &= -3x^2 + (2x - 3x) \\ &+ (-1 + 4) = -3x^2 + (2 - 3)x + 3 \\ &= -3x^2 - x + 3. \end{aligned}$$

c) Para sumar los polinomios

$4x^2 - x + 2$ y $-5x^2 + 2x - 6$

podemos proceder así:

$(4x^2 - x + 2) + (-5x^2 + 2x - 6) =$
$(4x^2 - 5x^2) + (-x + 2x) + (2 - 6) =$
$(4 - 5)x^2 + (-1 + 2)x + (-4) = (-1)x^2 + (1)x - 4 =$
$-x^2 + x - 4.$

Seguramente usted ya observó que al sumar dos polinomios, la suma que se obtiene también es un polinomio.

Ejercicio 20. Procediendo como en el ejemplo anterior, efectúe las siguientes adiciones de polinomios.

a) $(2x^3 + 6x^2 - 7) + (4x^3 - 2x^2 + 3)$
b) $(-5a^2 - a + 9) + (-3a^2 + 4a - 12)$
c) $(2x^2 + 5x + 1) + (6x^2 + 2x + 4)$
d) $(8a^2 + a + 4) + (2a + 6)$
e) $(8x^2 - 5) + (3x^2 + 5)$
f) $(9a^2 - 2a - 6) + (5a^2 + 8a)$
g) $(m^2 - 2m + 1) + (3m^2 + 5m - 2)$
h) $(6x - 13 + 4x^2) + (8 - 9x^2 + 4x)$
i) $(4b - 4) + (2b - 3b^2 + 4)$
j) $(x^2 + xy + y^2) + (2y^2 + xy - x^2)$
k) $(4x^2 + 2x + 8) + (7x^2 + 4x + 8)$
l) $(6z^2 + 8z + 1) + (8z^2 + 10z + 7)$
m) $(3x^3 - 5x^2 + 1) + (2x^2 + 3x - 5)$
n) $(x^{10} - 7x^5) + (3x^5 + x)$
o) $(3a^6 + a^4 + a^2 + 5) + (a^5 + 5a^2 + 10)$
p) $(7y^7 + y^4 - y^3 + y) + (5y + 2y^4 - 3y^2 + 12)$

Sustracción de polinomios

En el estudio de esta operación con polinomios vamos a aplicar nuestros conocimientos sobre la sustracción de números racionales.

Recuerde que la diferencia entre dos números se encuentra sumando el minuendo con el inverso aditivo del sustraendo· esto es,

$$\boxed{r - s = r + (-s)}$$

Así que para restar dos polinomios el problema que primero debemos resolver es: dado un polinomio, encontrar su inverso aditivo. Esto es muy fácil:

Ejemplo. Dado el polinomio $5a^2 - 7a + 9$ su inverso aditivo es,

$$-5a^2 + 7a - 9$$

porque,

$$(5a^2 - 7a + 9) + (-5a^2 + 7a - 9) = 0$$

Lo que puede observarse en estos dos polinomios ocurre en general. Esto es, el inverso aditivo de un polinomio es el polinomio que se obtiene al sustituir cada coeficiente del polinomio dado, por su inverso aditivo.

De manera que, si deseamos encontrar la diferencia de dos polinomios, podemos proceder como en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1. $(8z^2 - 5z + 4) - (10z^2 - 12z + 9) =$
$= (8z^2 - 5z + 4) + (-10z^2 + 12z - 9) =$
$= -2z^2 + 7z - 5.$

Ejercicio 21. Compruebe que esta diferencia sumada con el sustraendo da como resultado el minuendo.

Ejemplo 2. $(-3.4x^3 + 2x^2 - 6) - (4.6x^3 - x^2 + 5x - 6) =$
$= (-3.4x^3 + 2x^2 - 6) + (-4.6x^3 + x^2 - 5x + 6) =$
$= -8x^3 + 3x^2 - 5x.$

Ejercicio 22. Tal como se hizo en los ejemplos anteriores, efectúe las sustracciones de polinomios que se indican. Compruebe sus resultados.

a) $(3t^2 + 4t - 7) - (t^2 - 2t - 9) =$
b) $(4a^3 - 6a^2 + 6) - (a^3 + 2a^2 + 4) =$
c) $(8y^3 + 4y^2 - 5) - (y^3 - 4y^2 + 2) =$
d) $(4z^2 - 2z + 9) - (3z^2 + 2z + 9) =$
e) $(x^3 - 3x + 2) - (2x^3 + 3x + 5) =$
f) $(x^2 + 2xy + y^3) - (3x^2 - 4xy - 2y^3) =$

g) $(a^3 - 3a^2b + 2b^3) - (2a^2b - 4a^3 + 5b^3) =$
h) $(2t^2 - 5t) - (4t^2 - 4t + 3) =$
i) $(6a^3 - 8a + 9) - (a^2 - 7a + 2a^3 - 5) =$
j) $(3x^5 - 2x^3 + x - 7) - (x^5 + 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 2) =$
k) $(3z^3 + 2z^2 - 3z + 1) - (2z^3 - z^2 - 3z + 2) =$
l) $(-5y^6 + 7y^3 - 9y) - (-8y^6 + 12y^3 - 4y + 6) =$

Multiplicación de polinomios

Para estudiar la multiplicación de polinomios empezaremos con el producto de monomios. En los siguientes ejemplos se muestra la forma en que se pueden multiplicar monomios utilizando la propiedad conmutativa, la propiedad asociativa y las leyes de los exponentes.

Ejemplo.

a) $(7x^2)(2x) = 7 \cdot 2x^2 \cdot x = 14x^3$
b) $(3x^3)(4x^2) = 3 \cdot 4x^3 \cdot x^2 = 12x^5$
c) $(-2x)(3x^3) = (-2)(3)x \cdot x^3 = -6x^4$
d) $(2y^2)(-4y^3) = (2)(-4)y^2 \cdot y^3 = -8y^5$
e) $(-2z^2)(-3z^3) = (-2)(-3)z^2 \cdot z^3 = 6z^5$

Ejercicio 23. Procediendo como en los ejemplos anteriores, efectúe las siguientes multiplicaciones.

a) $a \cdot 2a^3 =$
b) $(-3x)2x =$
c) $(4z^3)(2z^2) =$
d) $(-2y^2)(-4y^5) =$
e) $(2ab)(3a^2b^3) =$
f) $(3y^m)(5y^4) =$
g) $(4x^2y^3)(7x^3y^6) =$
h) $(-5x^3y^6)(-4x^2z^5) =$
i) $(3a^2b)(-5a^3b^4) =$
j) $(-8t^3y)(-6t^2y^3) =$
k) $(-6a^3b^2)(-a^4b^3) =$

Ahora que ya aprendimos a multiplicar monomios, nos resultará fácil multiplicar un monomio por un polinomio que tenga dos o más términos. Bastará con que apliquemos adecuadamente la propiedad distributiva.

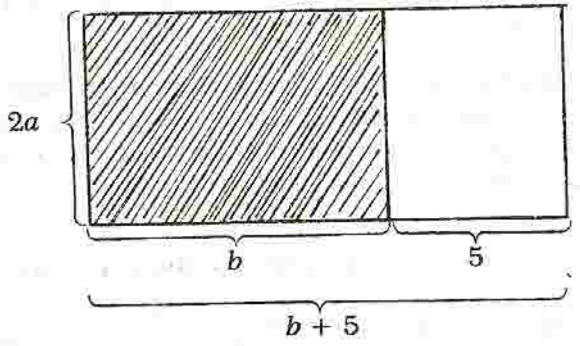
Veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo. Se quiere multiplicar $2a$ por $b + 5$.

$$2a(b+5) = 2a \cdot b + 2a \cdot 5 = 2ab + 10a$$

Observe que lo que hemos hecho es aplicar primero la propiedad distributiva y efectuar después las multiplicaciones de monomios.

Podemos ilustrar esta multiplicación en la siguiente forma:



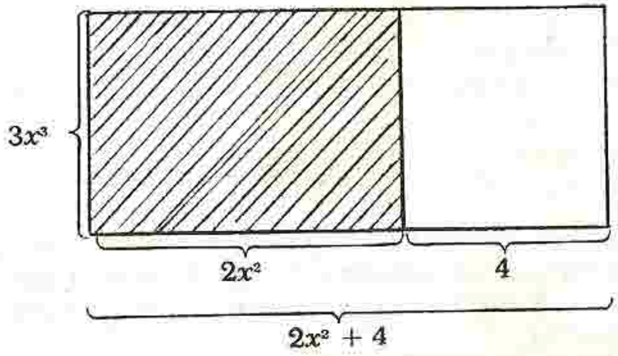
El área de este rectángulo se puede expresar como el producto $2a(b + 5)$, o bien, como la suma de las áreas de los rectángulos de color. $(2a)(b) + (2a)(5)$.

Ejemplo. Multipliquemos $3x^3$ por $2x^2 + 4$.

$$3x^3(2x^2+4) = 3x^3(2x^2) + 3x^3(4) = 6x^5 + 12x^3$$

Observe usted que lo que hemos hecho es aplicar primero la propiedad distributiva y posteriormente efectuar las multiplicaciones de los monomios.

Ilustremos la multiplicación, como en el ejemplo anterior, por medio de un rectángulo.



El área de este rectángulo la podemos calcular de dos maneras: multiplicando la altura por la base, $3x^3(2x^2 + 4)$; o bien, sumando las áreas de los dos rectángulos coloreados, $3x^3 \cdot 2x^2 + 3x^3 \cdot 4$.

Resolvamos ahora otras multiplicaciones como las anteriores.

Ejemplo.

a) $5a(4a^2 + 3a) = 5a(4a^2) + 5a(3a) = 20a^3 + 15a^2$

b) $-7y^2(6y^2 - 4y - 5) = (-7y^2)6y^2 + (-7y^2)(-4y) + (-7y^2)(-5) = -42y^4 + 28y^3 + 35y^2$

c) $a^2(a^3 - 3.5ab + 2b^2) = a^2 \cdot a^3 + a^2(-3.5ab) + a^2 \cdot 2b^2$
$= a^5 - 3.5a^3b + 2a^2b^2$

d) $(x^2 - 2xy + y^2)(-2x^3) = x^2(-2x^3) + (-2xy)(-2x^3) + y^2(-2x^3) = -2x^5 + 4x^4y - 2x^3y^2$

Ejercicio 24. Efectúe las siguientes multiplicaciones de polinomios.

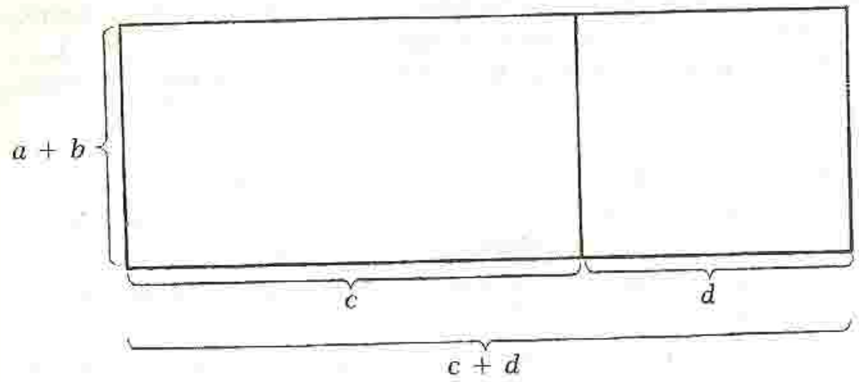
a) $5a(2a + 3)$
b) $3x(xy - 5)$
c) $(2x - 7)5x^2$
d) $(x^2 - 2x + 3)(-3x^3)$
e) $2a(a^2 - 5a + 4)$
f) $(x - y)x$
g) $-5m^2(3m^2 - 4m + 1)$
h) $(2x^2 - 3x + 4)(-x)$
i) $(a + b)a$
j) $x^3y(2x^3 - 3xy^2 - y)$
k) $3y(4y + 5)$
l) $ab(a^2 + b^2 + c)$
m) $(2m^2 - 6m)(-5m)$
n) $(xy + x)(x^2y^2)$
o) $(2x^2 + 5x - 3)(-x)$
p) $(-3y^2 + y - 3)(-y)$
q) $(2m^2 + 3m - 1)m$

Otro problema que podemos resolver aplicando la propiedad distributiva es la multiplicación de dos polinomios.

Ejemplo. Si deseamos multiplicar el binomio $(a + b)$ por el binomio $(c + d)$, podemos aplicar repetidamente la propiedad distributiva:

$$(a+b)\ (c+d) = (a+b)\ c + (a+b)\ d$$

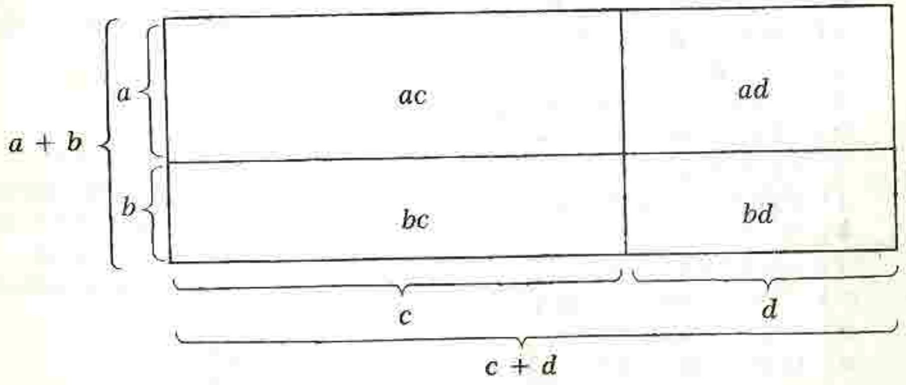
Este proceso inicial lo podemos ilustrar así:



En el resultado obtenido volvemos a aplicar la propiedad distributiva en cada uno de los sumandos.

$$\boxed{(a + b)c} + \boxed{(a + b)d} = \boxed{ac + bc} + \boxed{ad + bd}$$

Esta última parte del proceso la podemos ilustrar así:



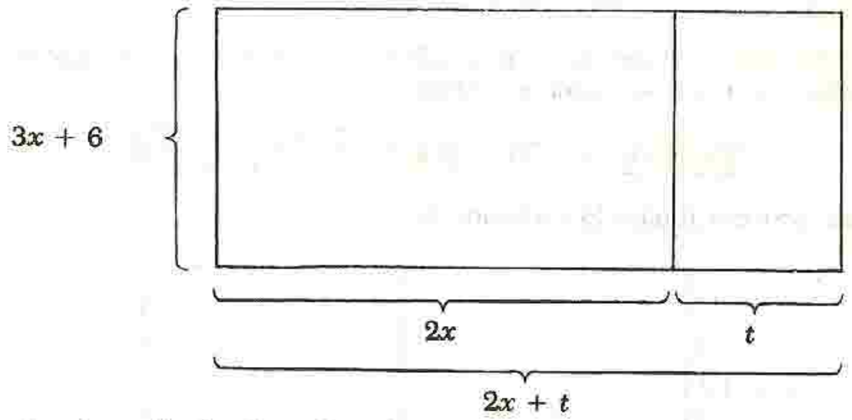
En resumen,

$$(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd$$

Ejemplo. Si deseamos multiplicar el binomio $(3x + 6)$ por el binomio $2x + t$, se puede aplicar la propiedad distributiva como antes

$$\boxed{(3x + 6)}\ (2x + t) = \boxed{(3x + 6)}\ 2x + \boxed{(3x + 6)}\ t$$

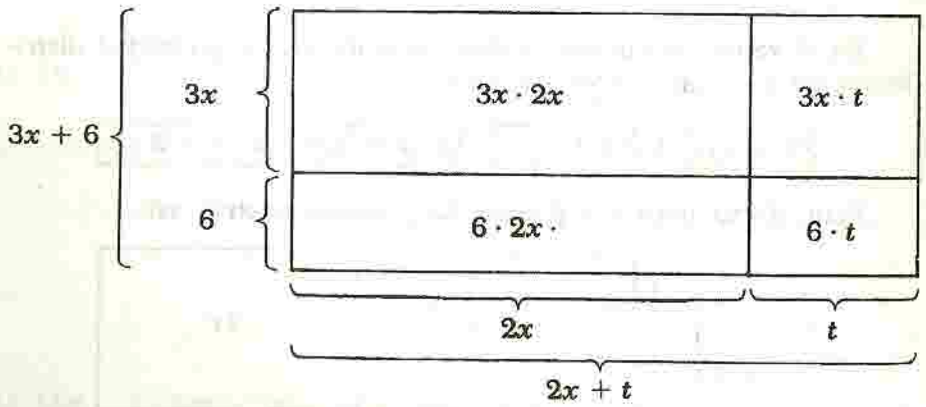
Este proceso inicial lo podemos ilustrar así:



En el resultado obtenido volvemos a aplicar la propiedad distributiva en cada uno de los sumandos

$$\boxed{(3x + 6)2x} + \boxed{(3x + 6)t} = \boxed{3x \cdot 2x + 6 \cdot 2x} + \boxed{3x \cdot t + 6 \cdot t}$$

Esta última parte del proceso la podemos ilustrar así:



Desde luego, se puede simplificar la última expresión y escribir

$$3x \cdot 2x + 6 \cdot 2x + 3x \cdot t + 6t = 6x^2 + 12x + 3xt + 6t$$

En resumen,

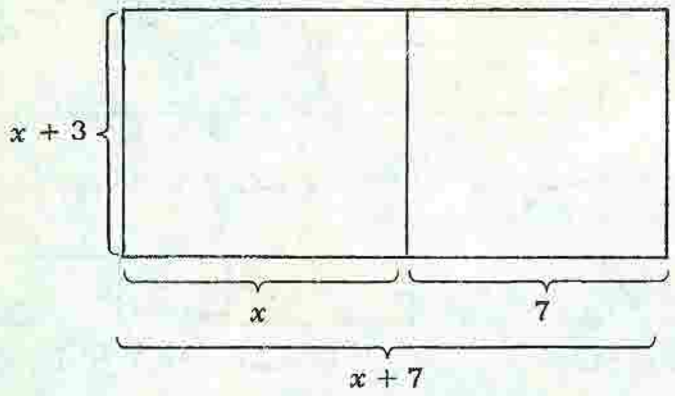
$$(3x + 6)(2x + t) = (3x + 6)2x + (3x + 6)t =$$

$$= 3x \cdot 2x + 6 \cdot 2x + 3x \cdot t + 6 \cdot t =$$
$$= 6x^2 + 12x + 3xt + 6t$$

Ejemplo. Si deseamos multiplicar el binomio $(x + 3)$ por el binomio $(x + 7)$, se puede distribuir

$$\boxed{(x+3)}\,(x+7) = \boxed{(x+3)}\,x + \boxed{(x+3)}\,7$$

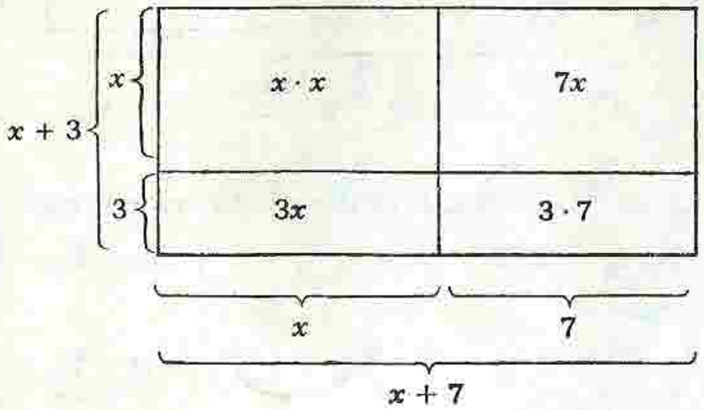
Este proceso inicial lo podemos ilustrar así:



En el resultado obtenido volvemos a aplicar la propiedad distributiva en cada uno de los sumandos

$$\boxed{(x+3)x} + \boxed{(x+3)7} = \boxed{x \cdot x + 3x} + \boxed{x \cdot 7 + 3 \cdot 7}$$

Esta última parte del proceso la podemos ilustrar así:



Si se simplifica la última expresión se puede escribir.

$$x \cdot x + 3x + x \cdot 7 + 3 \cdot 7 = x^2 + 3x + 7x + 21 =$$
$$= x^2 + 10x + 21$$

En resumen,

$$\underbrace{(x + 3)}(x + 7) = (x + 3)x + (x + 3)7 = x \cdot x + 3x + 7x + 3 \cdot 7$$
$$= x^2 + 10x + 21.$$

Ejercicio 25. Efectúe las siguientes multiplicaciones,

a) $(2y + 5)(3y + 2)$
b) $(5x - 3)(x + 3)$
c) $(2t - 5)(3t - 8)$
d) $(2a + 3)(3a + 6)$
e) $(x + 4)(x - 4)$
f) $(y^2 - 5)(y^2 + 8)$
g) $(x + 6)(x + 6)$
h) $(y - 7)^2$
i) $(t + 9)(t - 10)$
j) $(2x + 3)(3x^2 + 8)$
k) $(2x^2 + 5)^2$
l) $(x + 8)(x - 5)$
m) $(2y^2 - 6)(2y^3 + 6)$
n) $(a + b)^2$
o) $(a - b)^2$
p) $(x + y)(x - y)$

Así como hemos efectuado la multiplicación de binomios, podemos también multiplicar polinomios que consten de más términos. Analicemos los siguientes ejemplos.

Ejemplo.

a) $(a + b)(c + d + e) = (a + b)c + (a + b)d + (a + b)e =$
$= ac + bc + ad + bd + ae + be$

b) $(2x + 6)(3x^2 + 5x + 4) = (2x + 6)3x^2 + (2x + 6)5x +$
$+ (2x + 6)4 =$
$= 2x \cdot 3x^2 + 6 \cdot 3x^2 + 2x \cdot 5x + 6 \cdot 5x +$
$+ 2x \cdot 4 + 6 \cdot 4 =$
$= 6x^3 + 18x^2 + 10x^2 + 30x + 8x + 24 =$
$= 6x^3 + 28x^2 + 38x + 24.$

c) $(5x - 3)(6x^2 - 9x + 8) = (5x - 3)6x^2 + (5x - 3)(-9x) +$
$+ (5x - 3)\,8 =$
$= 5x \cdot 6x^2 + (-3)6x^3 + 5x(-9x) +$
$+ (-3)(-9x) + 5x \cdot 8 + (-3)8 =$
$= 30x^3 + (-18x^2) + (-45x^2) +$
$+ 27x + 40x + (-24) =$
$= 30x^3 - 63x^2 + 67x - 24.$

Ejercicio 26. Efectúe las siguientes multiplicaciones utilizando la propiedad distributiva.

a) $(2x - 3y)(4x^2 + 5x - y^2)$
b) $(3x + 4)(2x^2 - 4x - 1)$
c) $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$
d) $(a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$
e) $(2x^2 - 5x + 3)(x^2 + 2)$
f) $(y^3 + 3y^2 + 5)(-3y + 4)$
g) $(x^2 - 2xy + y^2)(x - y)$
h) $(2x + 3)^3$
i) $(a^2 + 2ab^3 + 4b^6)(a - 2b^3)$
j) $(3x + y^2)(9x^2 - 3xy^2 + y^4)$
k) $(x^2 + xy + y^2)(x^2 + y^2)$
l) $(a + 3)(3a^3 + 5a^2 + 2a + 9)$
m) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$
n) $(a + b)^3$
o) $(a^2 - a + 1)(a + 1)$
p) $(x^3 + 8x^2 + 7x + 9)(x^2 + 3x + 5)$
q) $(3a^4 + 2a^3 + 5a^2 + 3a + 2)(7a^2 + 9a - 3)$
r) $(5a^6 - 7a^5 - 3a^3 + 2a + 1)(a^2 - 2a + 1)$

Observación. A veces, al multiplicar polinomios se acostumbra usar un esquema como el siguiente, análogo al de la multiplicación de números expresados en forma decimal.

Ejemplo. Para multiplicar $a^2 + 2ab + b^2$ por $(a + b)$ podemos utilizar el siguiente esquema.

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \phantom{{}+ b^3} \\ a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

Ejemplo. Para multiplicar el polinomio $5x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 7x + 7$ por $8x^2 + 5x + 1$ podemos proceder así:

$$\begin{array}{r} 5x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 7x + 7 \phantom{{}+ 35x + 7} \\ 8x^2 + 5x + 1 \phantom{{}+ 35x + 7} \\ \hline 40x^6 + 24x^5 + 16x^4 + 56x^3 + 56x^2 \phantom{{}+ 42x + 7} \\ 25x^5 + 15x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 35x \phantom{{}+ 7} \\ 5x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 7x + 7 \\ \hline 40x^6 + 49x^5 + 36x^4 + 69x^3 + 93x^2 + 42x + 7 \end{array}$$

Ejercicio 27. Vuelva a hacer las 5 multiplicaciones primeras del ejercicio anterior utilizando el esquema ilustrado en los ejemplos anteriores.

División de polinomios

En la segunda unidad de este curso demostramos la propiedad siguiente:

> *Si* k, a *y* b *son números racionales con* k ≠ 0 *y* b ≠ 0, entonces
>
> $$\frac{\mathrm{ka}}{\mathrm{kb}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$$

Esta es muy útil para simplificar algunas expresiones algebraicas. Por ejemplo si *a, b, c* y *d* denotan números racionales (con *a, b* y *d* distintos de cero), tenemos que

$$\frac{abc}{abd} = \frac{c}{d}$$

Y decimos que hemos simplificado la fracción algebraica "tachando" factores comunes (distintos de cero) del numerador y del denominador. Escribimos

$$\frac{\cancel{a}\cancel{b}c}{\cancel{a}\cancel{b}d} = \frac{c}{d}$$

En el ejemplo que sigue ilustraremos este proceso, pero antes convengamos en lo siguiente:

Nota. En todo lo que sigue, aun cuando no se mencione explícitamente, convendremos en que todas las expresiones que figuran en los denominadores *denotan números racionales distintos de cero.*

Ejemplo.

a) $\dfrac{\cancel{t}t}{\cancel{t}s} = \dfrac{t}{s}$

d) $\dfrac{15x^2yz^3}{20xy^2z} = \dfrac{3 \times \cancel{5}\cancel{x}x\cancel{y}\cancel{z}z^2}{4 \times \cancel{5}\cancel{x}y\cancel{y}\cancel{z}} = \dfrac{3xz^2}{4y}$

b) $\frac{a^3b}{a^2b^2} = \frac{\cancel{a^2}a\cancel{b}}{\cancel{a^2}\cancel{b}b} = \frac{a}{b}$

e) $\frac{21x^{n+1}}{14x^n} = \frac{\cancel{7} \times 3\cancel{x^n}x}{\cancel{7} \times 2\cancel{x^n}} = \frac{3x}{2}$

c) $\frac{x}{xy} = \frac{1\cancel{x}}{\cancel{x}y} = \frac{1}{y}$

f) $\frac{\cancel{(a+b)}(c+d)}{\cancel{(a+b)}(c+d^2)} = \frac{c+d}{c+d^2}$

Ejercicio 28. Procediendo como en el ejemplo anterior simplifique las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\frac{xy}{xz}$ b) $\frac{abc}{adc}$ c) $\frac{x}{x^2}$ d) $\frac{x^2}{x^3}$

e) $\frac{x^2}{x^4}$ f) $\frac{a^3}{a^4}$ g) $\frac{a}{a^5}$ h) $\frac{a^7}{a}$

i) $\frac{abc}{acb}$ j) $\frac{abc}{ab^2c}$ k) $\frac{a^5b^5}{a^7b^7}$ l) $\frac{9r^5}{3r^2}$

m) $\frac{a^{n+1}}{a}$ n) $\frac{b^{n+2}}{b^2}$ o) $\frac{b^2}{b^{n+1}}$ p) $\frac{x^3}{x^{n+1}}$

q) $\frac{28x^2y^2}{7x(y+z)}$ r) $\frac{25(a+b)}{(a+b)^2}$ s) $\frac{(2x+3y)(x+y)}{(x+y)(3x+2y)}$

¿Es correcto escribir $\frac{2x+5}{2x+7} = \frac{5}{7}$? Para comprobar su contestación encuentre el valor de la expresión del miembro izquierdo para $x = 3$ y compárelo con $\frac{5}{7}$.

Observación importante. Es muy frecuente que, una vez acostumbrados a tachar factores comunes del numerador y del denominador de las fracciones algebraicas, se cometa el *grave error* de tachar también sumandos comunes del numerador y del denominador. Así, a menudo vemos *errores* como el siguiente:

$$\frac{a+b}{a+c} = \frac{b}{c}$$

Esto no es correcto, como lo podemos ver en ejemplos:

$$\frac{3+5}{3+7} = \frac{8}{10} \neq \frac{5}{7} \qquad \frac{3+4+5}{3+4+6} = \frac{12}{13} \neq \frac{5}{6}$$

$$\frac{2+9}{2+1} = \frac{11}{3} \neq \frac{9}{1} \qquad \frac{1+1+7}{1+6+7} = \frac{9}{14} \neq \frac{1}{6}$$

Por lo tanto, debe usted tener muy presente que *podemos tachar factores comunes, pero no sumandos comunes.*

La simplificación de fracciones nos es útil para efectuar algunas divisiones de polinomios.

Empecemos con el caso en que tanto el dividendo como el divisor sean monomios.

Ejemplo.

a) Para dividir el monomio $15a^3$ entre $5a$ podemos proceder como sigue:

$$\frac{15a^3}{5a} = \frac{3 \cdot \cancel{5} \cdot a^2 \cdot \cancel{a}}{1 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{a}} = \frac{3a^2}{1} = 3a^2$$

Vemos así que, a veces, al dividir un monomio entre otro monómio obtenemos un monomio.

b) $\frac{-30x^4}{6x^3} = \frac{(-5)\cancel{6}x\cancel{x^3}}{1 \cdot \cancel{6}\cancel{x^3}} = \frac{-5x}{1} = -5x$

c) $\frac{18y^5}{-9y} = \frac{(-2)(-9)y\,y^4}{1(-9)y} = -2y^4$

Podemos también proceder así:

d) $\frac{54t^7}{6t^3} = \frac{54}{6}\,\frac{t^7}{t^3} = 9t^{7-3} = 9t^4$

(Aquí hemos usado una de las leyes de los exponentes.)

e) $\frac{-24b^6}{6b^2} = \frac{-24}{6} \cdot \frac{b^6}{b^2} = -4b^{6-2} = -4b^4$

Ejercicio 29. Procediendo como en el ejemplo anterior efectúe las siguientes divisiones de monomios.

a) $\frac{12m^4}{-4m^2} =$ b) $\frac{-15t^8}{5t^5} =$

c) $\frac{-45t^8}{9t^6} =$ d) $\frac{-8a6}{8a^2} =$

e) $\frac{-28a^3x^6}{-7ax^5} =$ f) $\frac{75x^3y^5}{-25x^3y^2} =$

g) $\dfrac{48x^3y^2z}{12xy} =$ h) $\dfrac{17r^4z^9}{-17r^3z^2} =$

i) $\dfrac{-33a^3b^2}{11a^3b^2} =$ j) $\dfrac{-63p^3r^2z}{-17r^3z^3} =$

Veremos ahora que, a veces, al dividir un polinomio entre un monomio se obtiene un polinomio. Para ello recordemos que

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

Ejemplo.

a) $\dfrac{40a^4 + 15a^3}{5a^2} = \dfrac{40a^4}{5a^2} + \dfrac{15a^3}{5a^2} = 8a^2 + 3a$

b) $\dfrac{9x^5 + 3x^3 + 6x^2}{3x^2} = \dfrac{9x^5}{3x^2} + \dfrac{3x^3}{3x^2} + \dfrac{6x^2}{3x^2} = 3x^3 + x + 2.$

Ejercicio 30. Procediendo como en el ejemplo anterior ejecute las siguientes divisiones.

a) $\dfrac{8a^3 - 2a^2}{2a} =$

b) $\dfrac{15x^4 - 20x^3 + 40x^2}{-5x^2} =$

c) $\dfrac{10t^3 + 6t^2 - 8t}{2t} =$

d) $\dfrac{-10m^3 + 30m^2 - 15m}{-5m} =$

e) $\dfrac{3y^3 - y^2 + 3y}{-y} =$

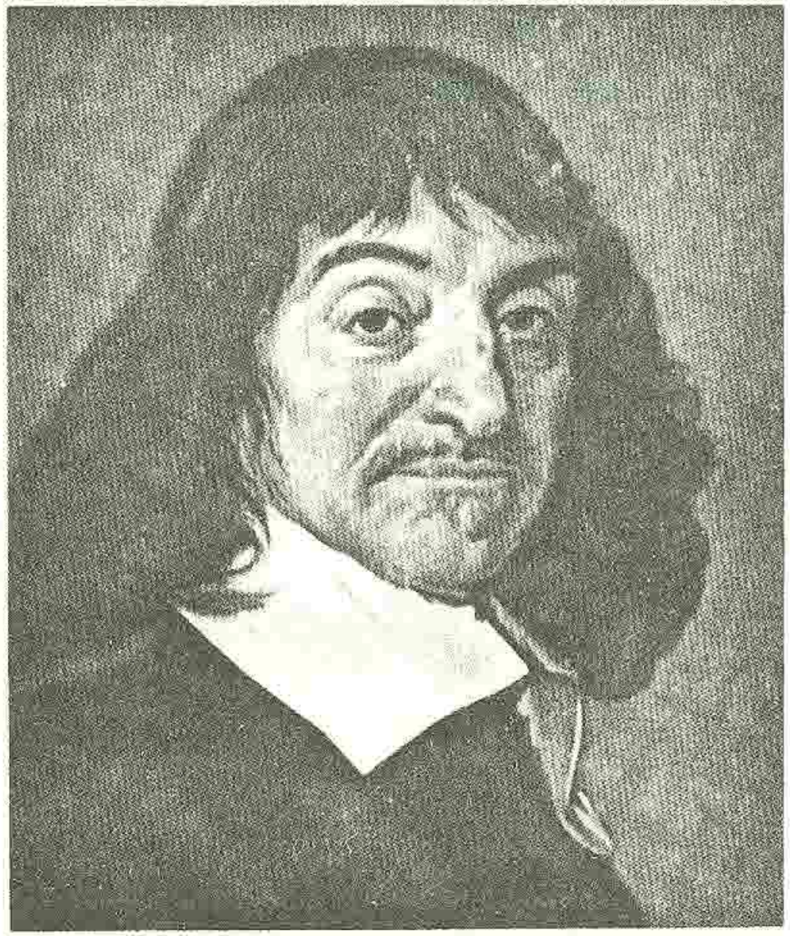
f) $\dfrac{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + ab^3}{a} =$

g) $\dfrac{-18a^3b^2 - 54a^2b^3 + 36ab^4}{18ab^2} =$

h) $\dfrac{-12x^{10}y^7 + 48x^7y^5 - 12x^5y^4}{-12x^5y^4} =$

i) $\dfrac{-20x^5y^9 + 60x^4y^5 - 100x^2y^4}{-20x^2y^3} =$

j) $\dfrac{28t^6x^6 + 56t^9x^4 - 70tx^3}{7tx^3} =$



Renato Descartes (1596-1650). Matemático y filósofo francés. Sentó las bases de la Geometría Analítica, cuyos métodos se utilizan en este capítulo.

CUARTA UNIDAD

FUNCIONES

OBJETIVOS PARTICULARES

Al terminar el estudio de esta unidad, el alumno:

I. Utilizará correctamente el plano cartesiano para trazar gráficas de algunas fórmulas, a partir de su tabulación.

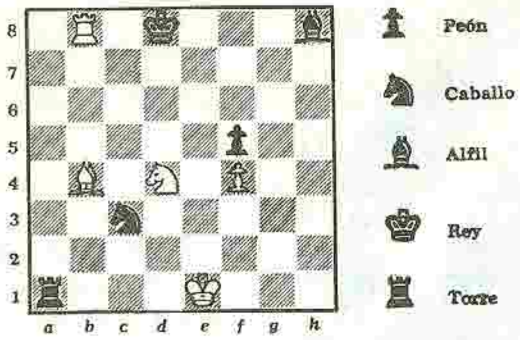
II. Interpretará como funciones algunas expresiones algebraicas.

III. Trazará, en el plano cartesiano, gráficas de funciones lineales.

IV Aplicará el concepto de función lineal al analizar situaciones de variación directamente proporcional.

1. EL PLANO CARTESIANO

El ajedrez es un juego muy interesante. Seguramente usted sabe jugarlo o, al menos, lo ha visto jugar. En el dibujo mostramos un tablero y algunas piezas del ajedrez.



Cuando se ilustra algo relativo al ajedrez, si se quiere determinar la posición de una pieza se puede marcar el tablero con letras y números como aparece en el dibujo: A cada columna se le asocia una letra y a cada renglón un número. De esta manera podemos localizar cualquier casilla del tablero; por ejemplo, en el tablero dibujado vemos que el peón negro está situado en la casilla *f*, 5. ¿Qué casilla ocupa el peón blanco?

Ejercicio 1. Diga qué casilla ocupa en el dibujo cada una de las siguientes piezas, tal como se hace en el ejemplo.

Caballo negro	Casilla c, 3	Caballo blanco	
Torre negra		Torre blanca	
Rey negro		Rey blanco	
Alfil negro		Alfil blanco	

En Geografía es muy importante saber localizar puntos en un mapa. Como usted recordará, en estos casos se emplean dos coordenadas, la latitud y la longitud. Para cada punto estas dos coordenadas son dos números; por ejemplo, en el mapa adjunto de Baja California, el punto *A* tiene las coordenadas 26° latitud norte, 112° longitud oeste. La Bahía de Magdalena está situada, aproximadamente, en 25° latitud norte, 112° longitud oeste.

Ejercicio 2. Indique las coordenadas de los siguientes puntos en el mapa.

Rosario ,

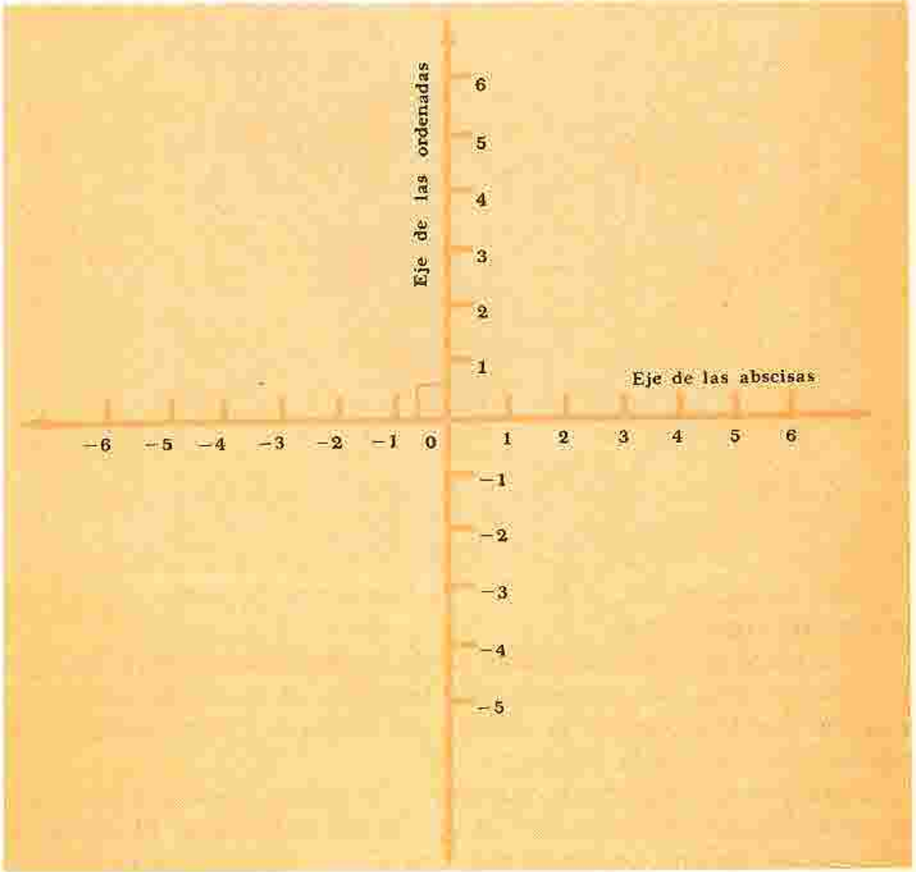
San Felipe ,

Mexicali ,

Querétaro ,

Si nuestro problema consiste en localizar puntos de un plano cualquiera, lo resolvemos de una manera semejante. Así lo hizo Renato Descartes, matemático del siglo XVI, que sistematizó el método para localizar puntos en un plano por medio de la recta numérica. El procedimiento es el siguiente:

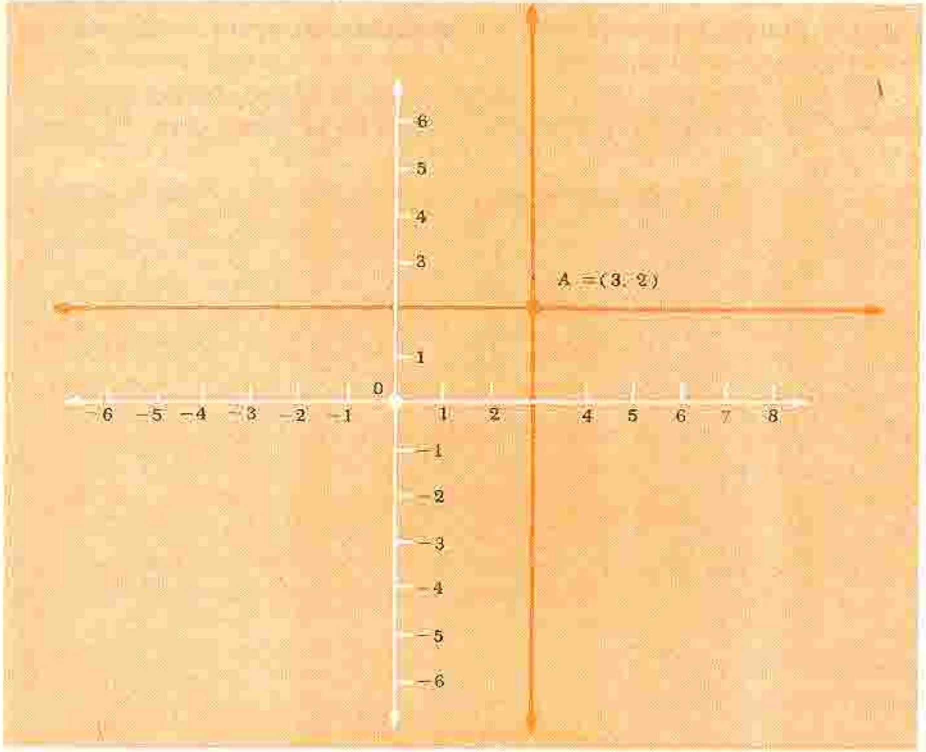
Consideramos dos rectas numéricas en el plano, perpendiculares entre sí, de tal manera que se intersequen en el punto cero, tal como se ilustra.



Es usual elegir la misma unidad de medida en las dos rectas. Sin embargo, en algunos casos conviene utilizar unidades de medida diferentes para las dos rectas.

Distinguimos las dos rectas llamando a una *eje de las abscisas* y a la otra *eje de las ordenadas*. Se acostumbra nombrar estos ejes como se hace en la ilustración anterior.

Ahora bien, cada punto del plano se nombra con una pareja de números, como se ilustra a continuación con el punto *A*.



Más precisamente, al punto *A* le asociamos la pareja (3, 2) que se obtiene como sigue:

Trazamos una perpendicular al eje de las abscisas, que pase por *A*. Como vemos, esta perpendicular interseca al eje en el punto 3. A este número lo llamamos la *abscisa del punto A* y lo tomamos como primer elemento de la pareja.

Para obtener el segundo número de la pareja, hacemos pasar por el punto *A* una perpendicular al eje de las ordenadas. El punto de intersección de esta perpendicular con el eje, indica cuál es la *ordenada del punto A*. En este caso es el número 2.

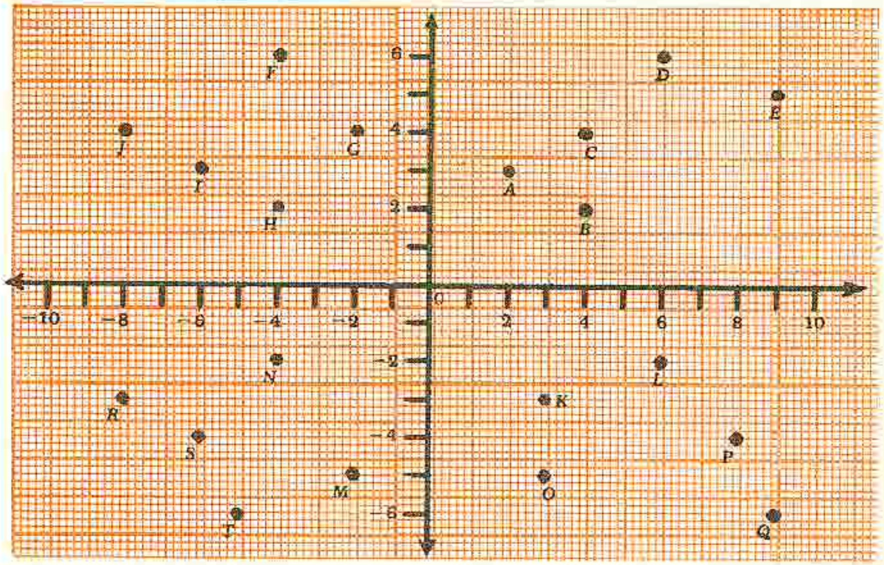
De este modo sabemos que el punto *A* se nombra con la pareja (3, 2), lo cual se indica simbólicamente de la siguiente manera:

$$A = (3, 2)$$

Y ahora podemos hablar indistintamente del punto *A* o del punto (3, 2).

A la abscisa y a la ordenada de un punto del plano se les llama las *coordenadas* de ese punto.

Ejercicio 3. Encuentre las coordenadas de los puntos que se ilustran en el dibujo de abajo (use regla y escuadra).

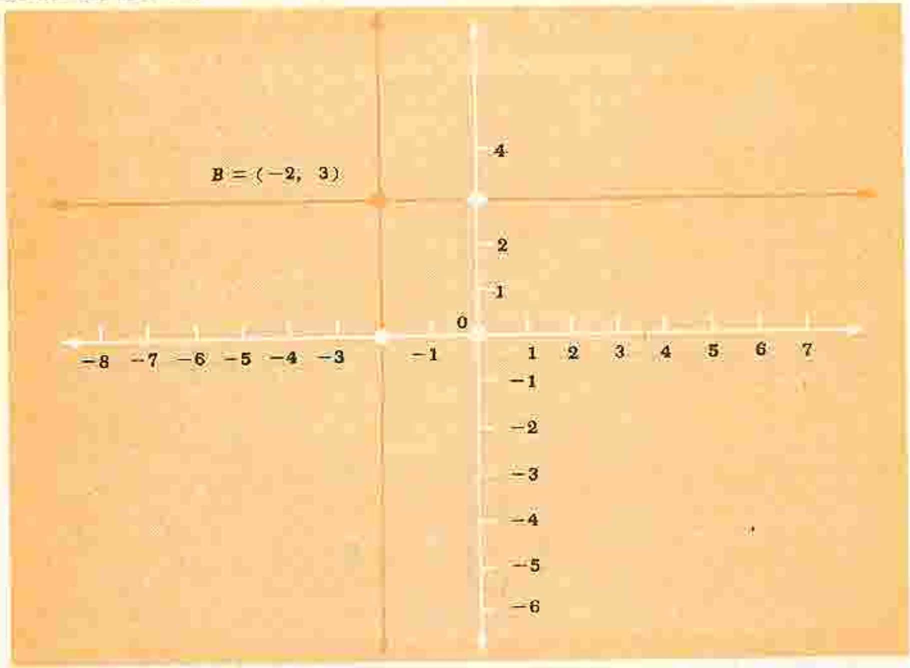


a) $A = (\quad , \quad)$
b) $B = (\quad , \quad)$
c) $C = (\quad , \quad)$
d) $D = (\quad , \quad)$
e) $E = (\quad , \quad)$
f) $F = (\quad , \quad)$
g) $G = (\quad , \quad)$
h) $H = (\quad , \quad)$
i) $I = (\quad , \quad)$
j) $J = (\quad , \quad)$
k) $K = (\quad , \quad)$
l) $L = (\quad , \quad)$
m) $M = (\quad , \quad)$
n) $N = (\quad , \quad)$
o) $O = (\quad , \quad)$
p) $P = (\quad , \quad)$
q) $Q = (\quad , \quad)$
r) $R = (\quad , \quad)$
s) $S = (\quad , \quad)$
t) $T = (\quad , \quad)$

Dos rectas numéricas en el plano, como las descritas anteriormente, reciben el nombre de *sistema de coordenadas del plano*, y al plano con un sistema de cooordenadas se le llama *plano cartesiano*.

En el plano cartesiano también podemos localizar un punto si conocemos sus coordenadas. Por ejemplo, ¿cuál es el punto *B* cuyas coordenadas son (−2, 3)? Dicho punto es la intersección de dos perpendiculares: la que interseca al eje de las abscisas en el punto

-2 y la que interseca al eje de las ordenadas en el punto 3. Observe usted la ilustración.



Ejercicio 4. **Trace un sistema cartesiano de coordenadas y localice los siguientes puntos. (Tome como unidad el centímetro.)**

a) $A = (-7, 8)$
b) $B = (7.5, 9)$
c) $C = (2.8, -2.8)$
d) $D = (2, 3)$
e) $E = (-7.5, 3)$
f) $F = (-8.7, 7)$
g) $G = (2, -6.3)$
h) $H = (-2.7, 7)$
i) $I = (-1, -7)$
j) $J = (-4.5, 1)$
k) $K = (.5, 7)$
l) $L = (7, 1.5)$
m) $M = (1, -2.5)$
n) $N = (-4, -4)$
o) $O = (7, -8)$
p) $P = (-1, -1)$
q) $Q = (-4.5, 4)$
r) $R = (-1.5, 2.3)$
s) $S = (5, 5)$
t) $T = (6.5, -6)$

Ejercicio 5. **De igual manera que en el ejercicio anterior, trace un plano cartesiano y señale los siguientes puntos.**

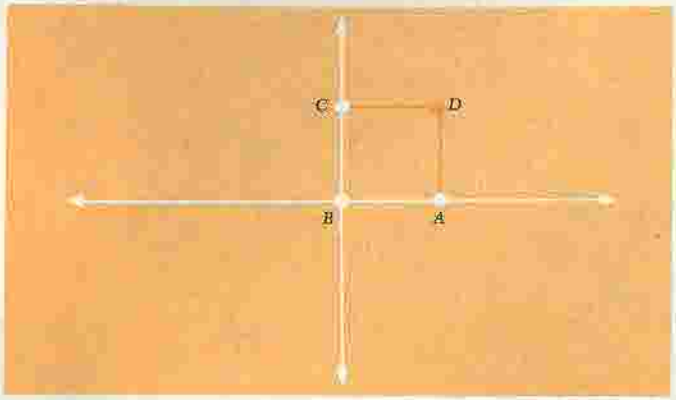
a) $A = (1, 0)$
b) $B = (0, 4)$
c) $C = (-5, 0)$
d) $D = (0, -6)$
e) $E = (4.5, 0)$
f) $F = (0, .5)$
g) $G = (0, -3.6)$
h) $H = (-3.1, 0)$
i) $I = (0, 0)$

Al punto (0, 0) se le acostumbra llamar *origen de coordenadas.*

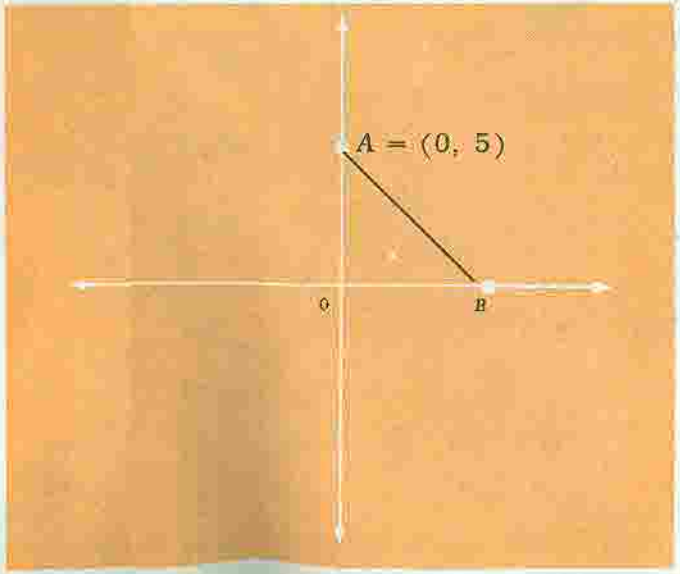
Ejercicio 6. Analice cada situación y haga lo que se indica.

a) El punto M tiene por coordenadas (7, 4).
¿Cuál es la distancia de M al eje de las abscisas?
¿Cuál es la distancia del punto al eje de las ordenadas?

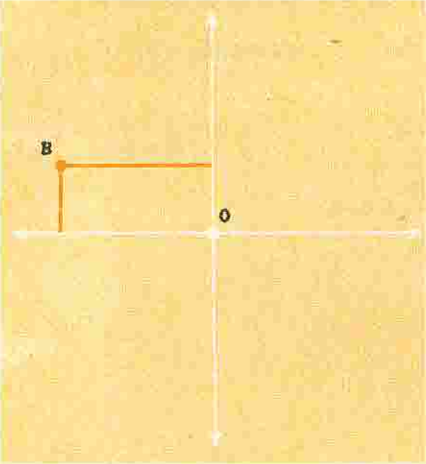
b) En este cuadrado el punto A tiene coordenadas (5, 0). ¿Cuáles son las coordenadas de B, C y D?



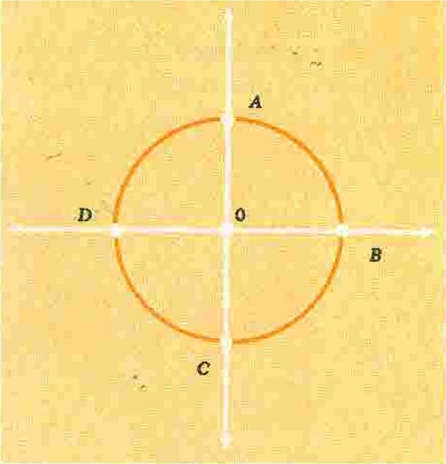
c) El triángulo ABO es isósceles. ¿Cuáles son las coordenadas de B?



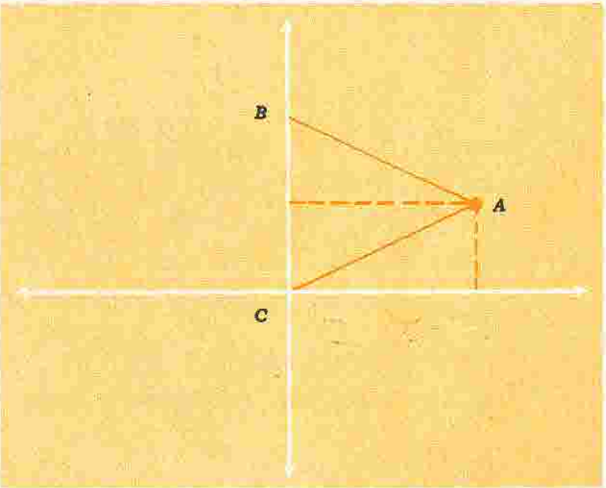
d) En el rectángulo, las coordenadas de *B* son (−5, 3). ¿Cuál es el área de la figura?



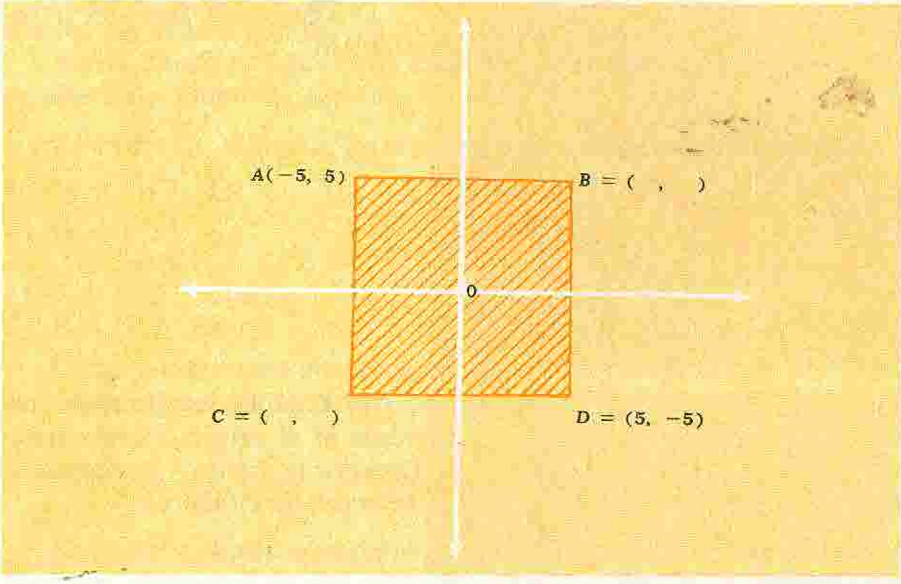
e) Esta circunferencia con centro en el origen, tiene un radio de 1.5 unidades. Determine las coordenadas de los puntos *A*, *B*, *C* y *D*.



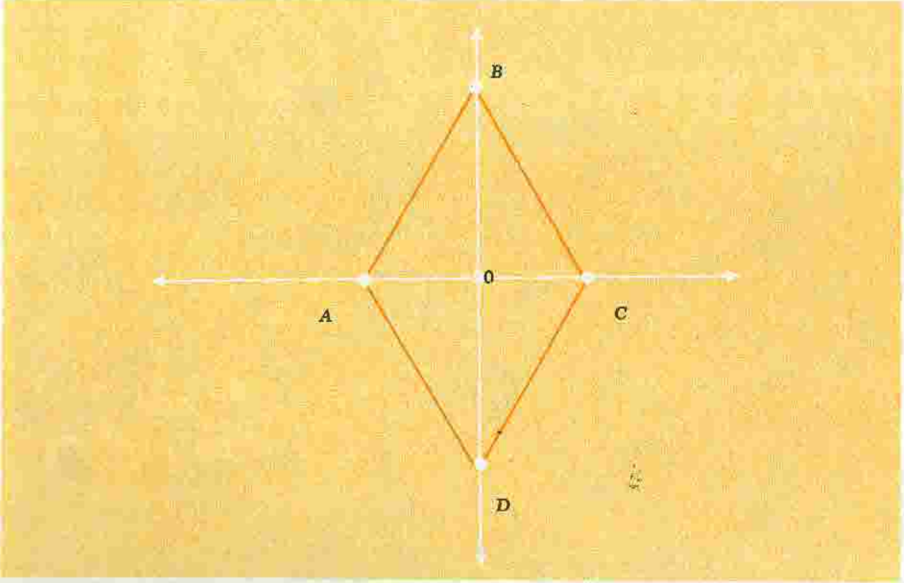
f) El triángulo *ABC* es isósceles y las coordenadas de *A* son (4,2). ¿Cuál es el área del triángulo?

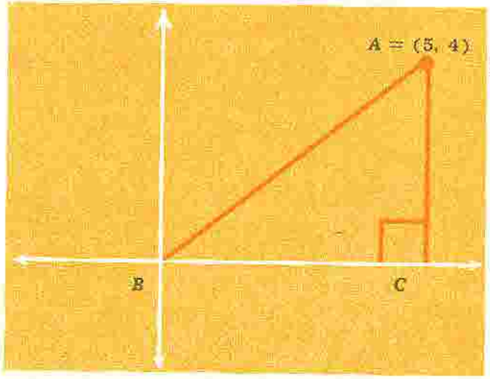


g) En el cuadrado *ABCD* indique las coordenadas de los puntos *B* y *C* y calcule el área de la figura.

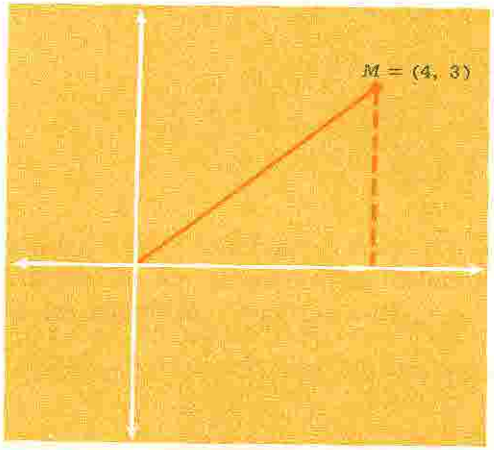


h) En este rombo la diagonal $\overline{BD}$ mide 5 unidades y la diagonal $\overline{AC}$ mide 3 unidades. Si las diagonales se intersecan en el origen, ¿cuáles son las coordenadas de los cuatro vértices?. Anótelas en el dibujo.

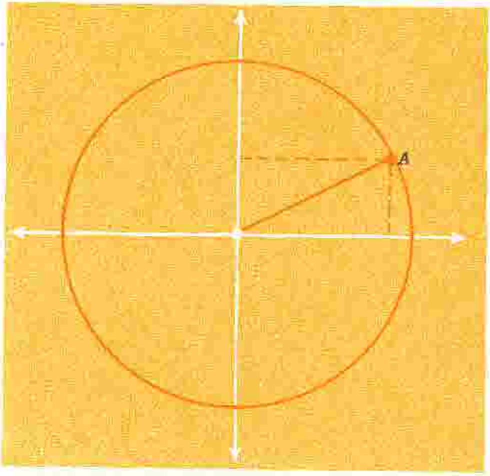




i) Calcule el área del triángulo *ABC*.



j) Calcule la distancia del punto *M* al origen. (Sugerencia: Observe la figura; ¿recuerda el teorema de Pitágoras?)



k) *A* es un punto de una circunferencia con centro en el origen. Si $A = (4, 2)$, ¿cuántas unidades mide el radio de esa circunferencia?

l) En una hoja de papel trace un sistema de coordenadas y localice los siguientes puntos: $(2, 2)$, $(-3.5, -3.5)$, $(5, 5)$, $(-6, -6)$.

Ahora dibuje la figura que contiene a todos los puntos que tienen su abscisa y ordenada iguales.

Ejercicio 7. Localice los siguientes puntos en un plano cartesiano.

a) $M = (-3, 3)$, $M' = (3, -3)$

b) $N = \left(-\frac{1}{2}\ \ 3\right)$ $N' = \left(3,\ -\frac{1}{2}\right)$

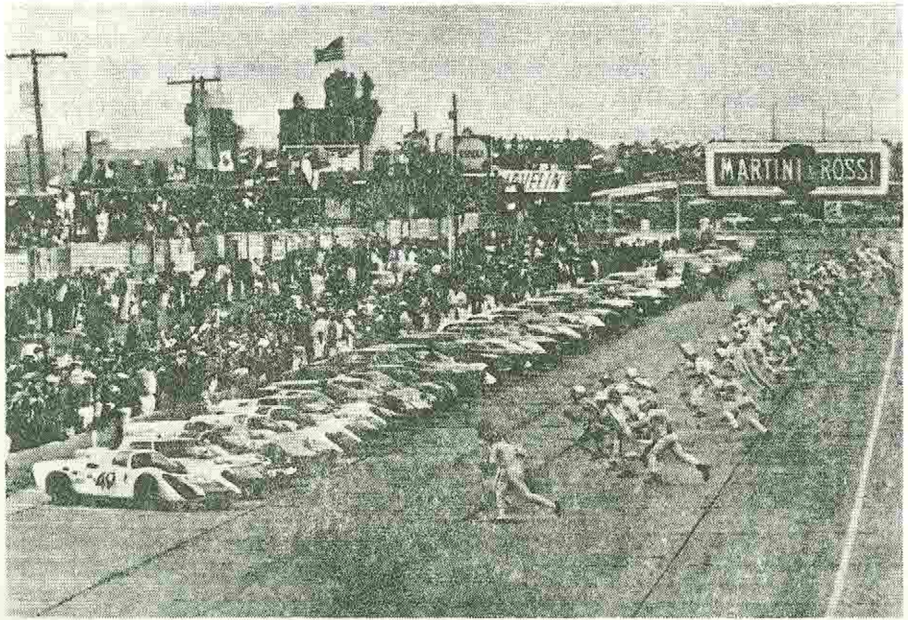
c) $O = (-7, -1.2)$ $O' = (-1.2, -7)$

d) $P = (0.7, 3.4)$ $P' = (3.4, 0.7)$

Como puede usted observar, en general la pareja (a, b) no denota el mismo punto que la pareja (b, a).

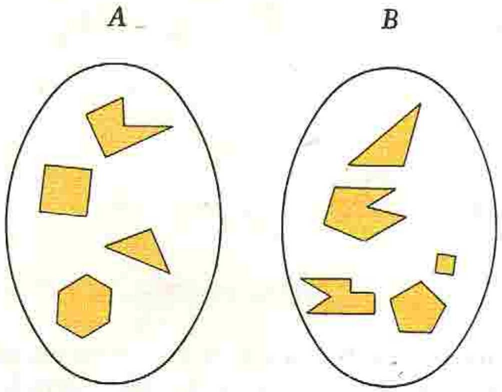
2. FUNCIONES

En la vida diaria observamos con frecuencia que hay relaciones entre los elementos de dos conjuntos. Así por ejemplo, el conjunto de pilotos y el de automóviles, que se ven en la fotografía, guardan entre sí alguna relación, pues a cada coche corresponde un determinado piloto.



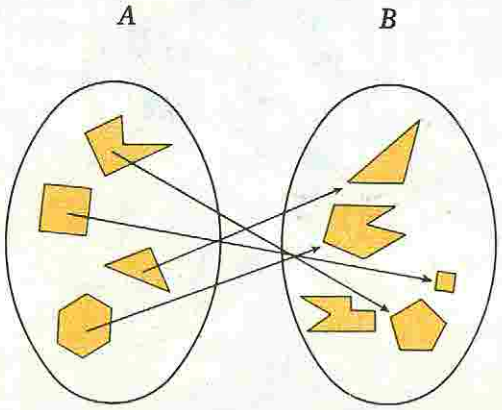
Desde luego, considerados dos conjuntos cualesquiera, sus elementos pueden estar relacionados, o pueden relacionarse, en varias formas posibles. Veamos algunos ejemplos particulares.

Ejemplo. Consideremos los conjuntos A y B, ilustrados a continuación.



Podemos relacionar los elementos de estos dos conjuntos en muy diversas formas; pero hagámoslo de una manera particular: asociemos a cada elemento de A, que es una figura, un elemento de B que tenga *igual número de lados*.

Esta correspondencia de elementos puede indicarse con flechas en la siguiente forma:



Como observamos, al elegir esta relación entre los elementos de A y de B, *a cada elemento de A le corresponde un elemento, y sólo uno, de B.*

Ejemplo. Sean los conjuntos N y C, tales que

$$N = \{2, 3, 4, 5, 6, -6\},$$

$$C = \{4, 9, 16, 25, 36, 49, 64\}.$$

Relacionemos sus elementos de modo que a cada elemento de N le corresponda su cuadrado, que está en C.

Esta relación puede ilustrarse así:

$$\begin{tikzcd}
\{2, \arrow[d] & 3, \arrow[d] & 4, \arrow[d] & 5, \arrow[d] & 6, \arrow[d] & -6\} \arrow[dl] & \\
\{4, & 9, & 16, & 25, & 36, & 49, & 64\}
\end{tikzcd}$$

En este caso también vemos que a cada elemento de N le corresponde uno, y sólo uno, de C.

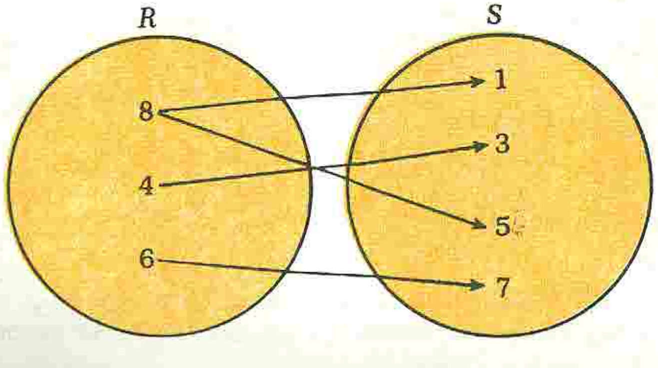
Cuando se tienen dos conjuntos y se relacionan sus elementos, si la relación es como en los ejemplos anteriores se dice que hay una *función* de un conjunto en el otro.

Conviene observar que, dada una función de un conjunto A en un conjunto B, se tiene que:

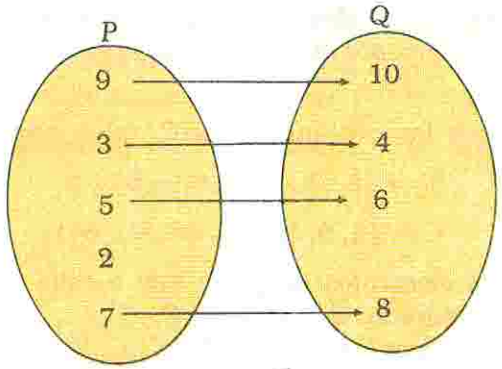
1. A cada elemento de A le corresponde un elemento de B.
2. A un elemento de A le corresponde *sólo uno* de B.
3. A varios elementos de A les puede corresponder *un mismo* elemento de B.
4. No necesariamente todo elemento de B corresponde a algún elemento de A.

Ejercicio 8. Analice con cuidado lo anterior y explique por qué los siguientes diagramas no representan una función

a)

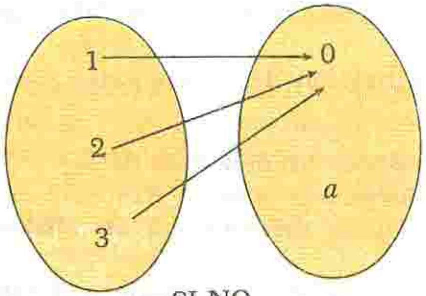


b)



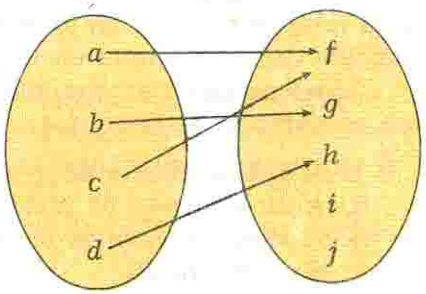
Ejercicio 9. Observe los siguientes diagramas y subraye la palabra SI o la palabra NO, según representen o no una función. En cada caso explique por qué.

a)



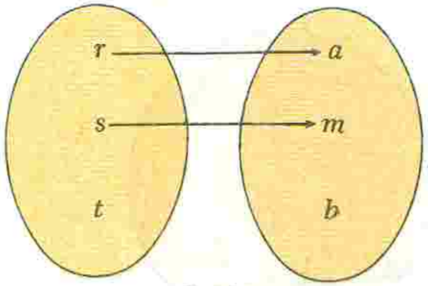
SI NO

b)



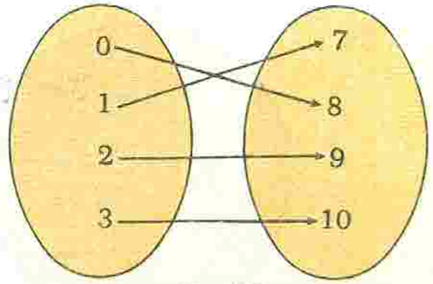
SI NO

c)



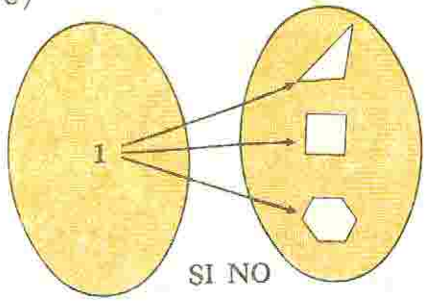
SI NO

d)



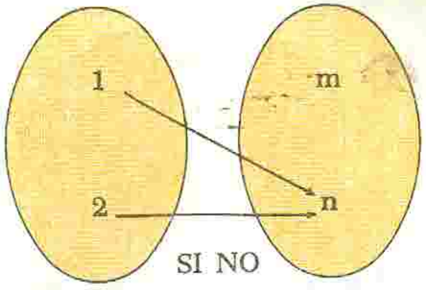
SI NO

e)



SI NO

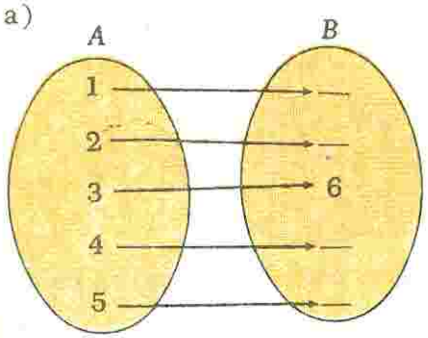
f)



SI NO

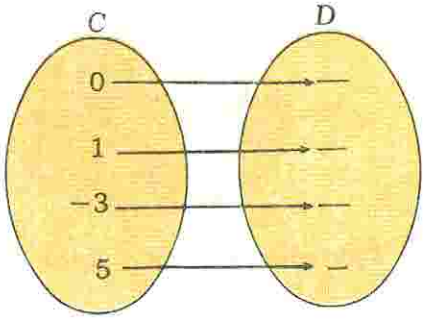
Ejercicio 10. Complete usted el diagrama para cada función escribiendo en los espacios vacíos o dibujando las flechas que falten.

a)



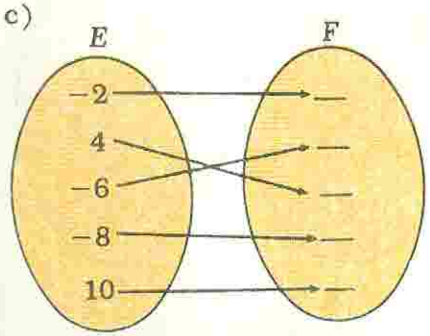
A cada elemento x de A le corresponde su doble ($2x$) que está en B.

b)



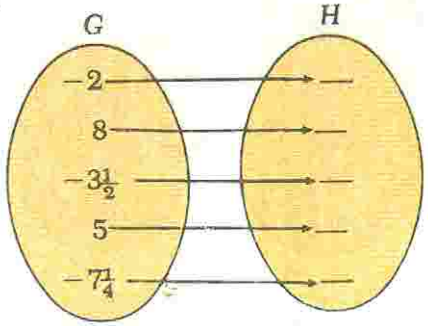
A cada elemento a de C le corresponde uno de D que sea su cuadrado (a^2).

c)



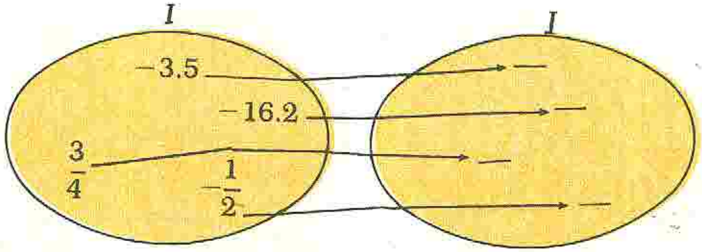
Asóciese a un elemento m de E un elemento de F que sea su cubo (m^3).

d)



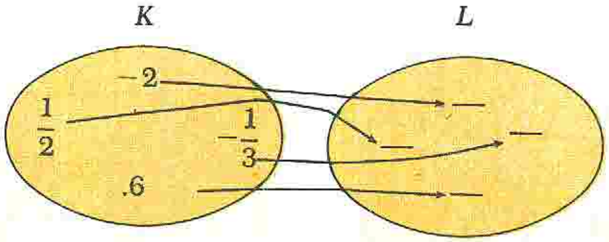
A cada elemento b de G se le asocia uno de H que sea su mitad $\left(\frac{b}{2}\right)$

e)



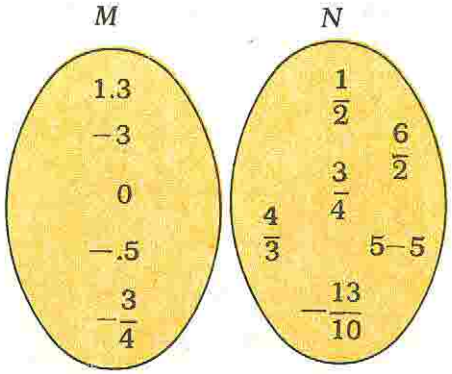
A cada elemento c de I le corresponde el elemento de J que es su quinta parte $\left(\frac{c}{5}\right)$.

f)



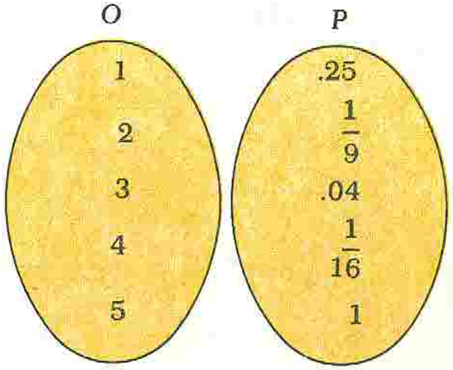
Todo elemento $3n + 2$, de L, se asocia con el elemento n, de K.

g)



A cada elemento x de M le corresponde uno de N que es su inverso aditivo $(-x)$.

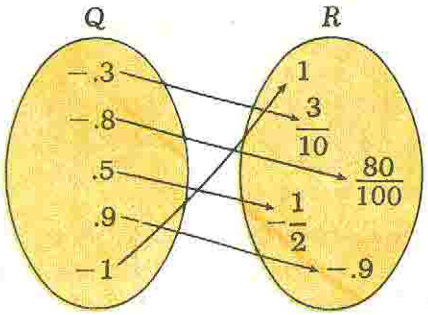
h)



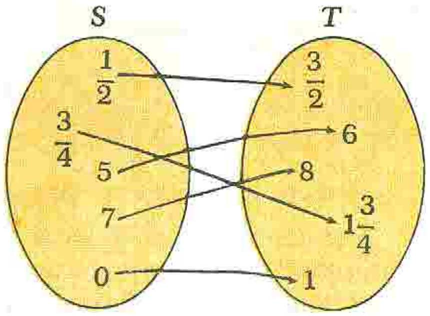
A todo elemento r de O le corresponde el elemento $\frac{1}{r^2}$ de P.

Ejercicio 11. Escriba la regla que corresponde a cada una de las siguientes funciones.

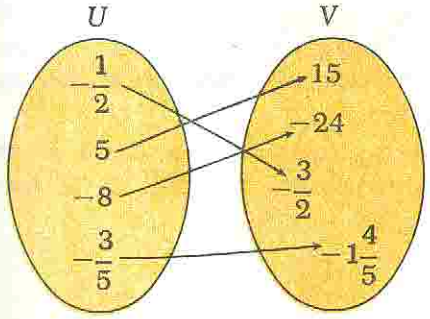
i)



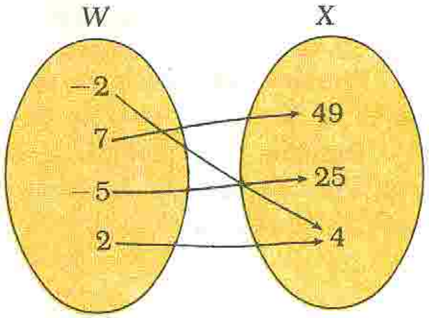
j)



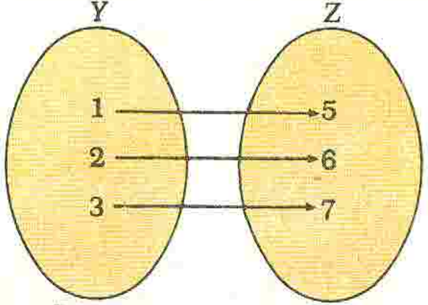
k)

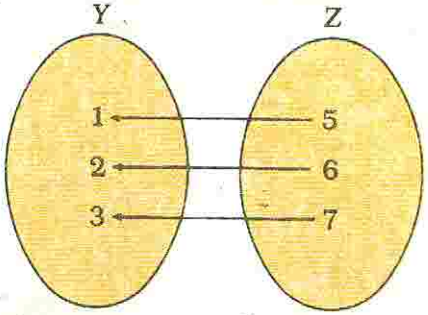


l)



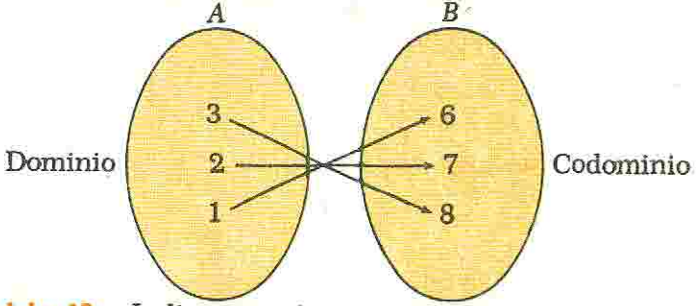
Ejercicio 12. Observe las ilustraciones de abajo y diga si las dos representan o no la misma función.





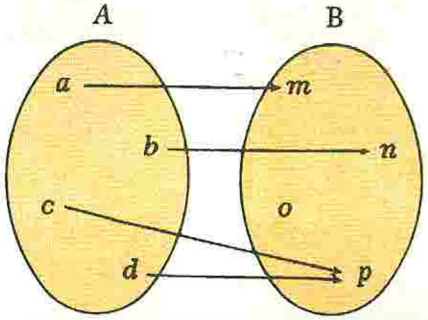
Discuta su respuesta con el maestro y sus compañeros.

Según se observa, al existir una función de un conjunto A en un conjunto B, cada conjunto tiene un papel diferente. Para señalar esta distinción, y para referirse con comodidad a cada conjunto, se acostumbra llamar *dominio* al conjunto A y *codominio* al conjunto B. Observe usted la ilustración.



Ejercicio 13. Indique, en los ejercicios anteriores, cuál conjunto es el dominio y cuál es el codominio.

También para facilitar el lenguaje se habla de "*la imagen de un elemento* según una función determinada"; por ejemplo, en la función ilustrada en el siguiente diagrama,



decimos que

la imagen de a es m,
la imagen de b es n,
la imagen de c es p,
la imagen de d es p.

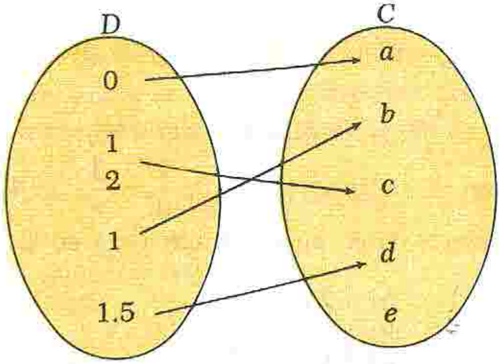
Ejercicio 14. Considerando la función que asocia a cada elemento del dominio su inverso multiplicativo diga usted cuál es la imagen de cada elemento.

$$\text{Dominio} = \{-1, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\text{Codominio} = \{\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{3}, -1\}$$

La imagen de -1 es ▨, la imagen de 1 es ▨,
la imagen de 2 es ▨, la imagen de 3 es ▨,
la imagen de 4 es ▨ y la imagen de 5 es ▨.

Para expresar más simplemente las funciones se acostumbra denotarlas con letras. Se dice, por ejemplo, "Sea f una función del conjunto A en el conjunto B" o bien, "Consideremos una función g de R en S". Esta notación es útil para representar la imagen de un elemento del dominio. Por ejemplo, si f es la función de D en C, que se ilustra a continuación,



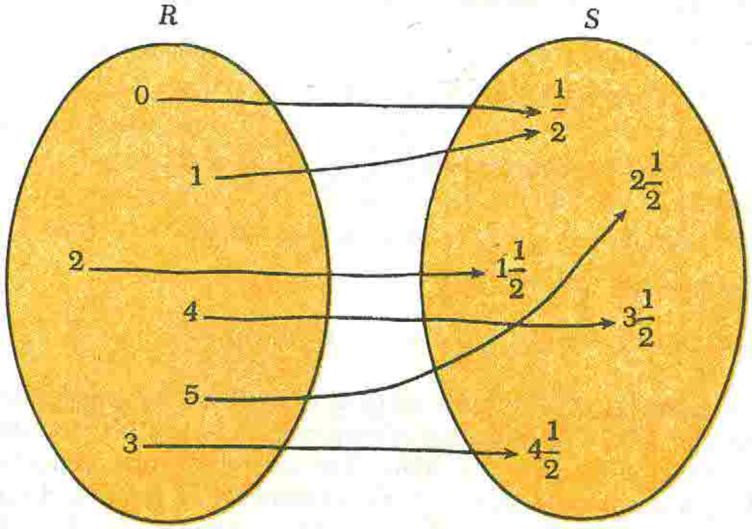
para indicar que a 0 le corresponde a, escribimos

$$f(0) = a,$$

y leemos: "La imagen de 0, según la función *f*, es *a*". De igual manera podemos escribir:

$$f(1) = b, \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = c \qquad \text{y} \qquad f(1.5) = d.$$

Ejercicio 15. Considerando la función *g*, ilustrada a continuación, complete las expresiones de abajo.



$g(0) = ■$ $\qquad g(1) = ■$ $\qquad g(2) = ■$

$g(3) = ■$ $\qquad g(4) = ■$ $\qquad g(5) = ■$

Ejercicio 16. Si *h* es la función del conjunto $A = \{0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1, 2, -2\}$ en el conjunto $B = \{0, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 4, -4\}$ que asocia a cada elemento *x* de *A*, su cuadrado (x^2) en *B*, entonces,

$h(2) = ■$ $\qquad h(-2) = ■$ $\qquad h(0) = ■$

$h(■) = 1$ $\qquad h\left(\frac{1}{2}\right) = ■$ $\qquad h(-1) = ■$

$h\left(-\frac{1}{2}\right) = ■$

Ejercicio 17. Si *F* es la función que asigna a cada elemento *x* del dominio el elemento x^3 del codominio, y dominio y codominio son, respectivamente, los siguientes conjuntos,

$$D = \{0, -.1, .2, -.3, .4, -.5\},$$

$$C = \{0, -.001, .001, -.008, .008, -.027, .027, -.064, .064, -.125, .125\},$$

se tiene entonces que

$F(0) = ■$ $\qquad F(-.1) = ■$ $\qquad F(.2) = ■$

$F(■) = -.125$ $\qquad F(■) = .064$ $\qquad F(■) = -.027$

La función *F*, del ejercicio anterior, puede describirse más brevemente en la siguiente forma:

$$x \mapsto F(x) = x^3$$

Con esta expresión se indica que si *x* representa cualquier elemento del dominio, su imagen, $F(x)$, es x^3.

Usando esta notación breve podríamos expresar, por ejemplo, la función del inciso a) del ejercicio número 10, en esta forma:

$$x \mapsto f(x) = 2x;$$

(En este caso estamos considerando que dicha función se denota con *f*).

Si denotamos con *f* a cualquier función del ejercicio 10 podríamos expresar brevemente la del inciso b) así:

$$a \mapsto f(a) = a^2;$$

la del inciso c quedaría así:

$$m \mapsto f(m) = m^3$$

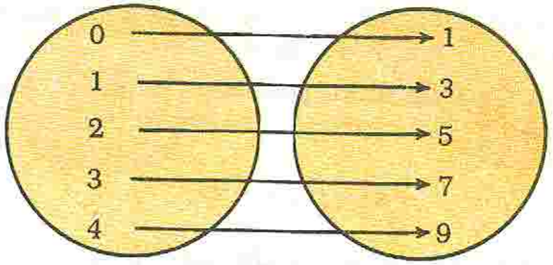
Ejercicio 18. Exprese en forma breve todas las demás funciones que aparecen en el Ejercicio 10.

Ejercicio 19. Considerando cada conjunto como dominio, encuentre las imágenes de sus elementos según la función que se indica.

a) $\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 1.5\}$ $x \mapsto f(x) = 2x$
b) $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ $x \mapsto f(x) = 3x$
c) $\{-\frac{3}{4}, -\frac{2}{4}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}\}$ $x \mapsto f(x) = \frac{x}{2}$
d) $\{-1.5, -1, -.5, 0\}$ $x \mapsto f(x) = 4x - 1$
e) $\{-1, -.5, -.1, 0, .1, .5, 1\}$ $x \mapsto f(x) = x^2$
f) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ $x \mapsto f(x) = x^2 + 2$
g) $\{-4, -3, -2\}$ $x \mapsto f(x) = 2x^2 + 3$
h) $\{-4, -3, -2, -1, 0\}$ $x \mapsto f(x) = 2x^2 - 3x$
i) $\{-1, 0, 1\}$ $x \mapsto f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 3$

Expresión de funciones por medio de tablas

Con frecuencia las funciones se describen por medio de tablas. Por ejemplo, si f es la función que se ilustra a continuación,



la tabla con la que se puede describir f es la siguiente:

	x	0	1	2	3	4
Elementos del dominio						
Imágenes	$f(x)$	1	3	5	7	9

Ejemplo. Considerando como dominio el conjunto $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, la función g tal que $x \mapsto g(x) = 3x^2$ puede describirse con la siguiente tabla:

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	12	3	0	3	12

El uso de tablas, como éstas, permite reconocer de un solo vistazo cuál es la imagen de cada elemento del dominio y, viceversa, si conocemos la imagen podemos ver fácilmente a qué elemento del dominio corresponde.

Ejercicio 20. En cada inciso complete la tabla para la función que se indica.

a) $x \to f(x) = -3x + 2$

x	0	1	2	3
$f(x)$				

b) $x \to f(x) = -\frac{1}{2}x - 1$

x	0	-1	-2	-3
$f(x)$				

c) $x \to f(x) = -x^2 + 5$

x	-1	-2	0	1
$f(x)$				

d) $x \to f(x) = -2x^2 - 3x$

x	0	-1	-2	-3
$f(x)$				

e) $x \to g(x) = -3x^3$

x	0	-1	-2	-3	-4
$g(x)$					

f)

x					
$g(x)$	16	9	0	9	16

$x \mapsto g(x) = x^2$

g)

x			
$g(x)$	.1	.01	.001

$x \mapsto g(x) = \frac{1}{x}$

h)

x					
$g(x)$	2	1	0	-1	-2

$x \mapsto g(x) = -x$

i)

x						
$h(x)$	-27	-8	-1	0	1	8

$x \mapsto h(x) = x^3$

j)

x	-1	1	-2	2	-3	3
$h(x)$						

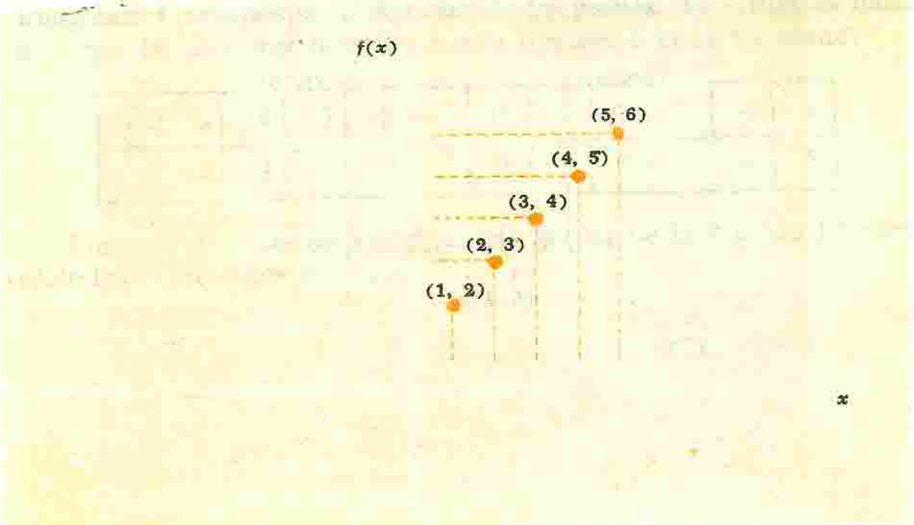
$x \mapsto h(x) = -\frac{1}{x}$

Gráfica de una función

Las funciones cuyos dominio y codominio son conjuntos numéricos pueden representarse gráficamente asociando a ellas algunos subconjuntos del plano cartesiano. Por ejemplo, consideremos una función f, dada por $x \mapsto f(x) = x + 1$, cuyo dominio sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y cuyo codominio sea el conjunto $B = \{0, 1, 2, 3, 4. 5, 6, 7\}$. Si queremos describir esta función con una tabla, podemos usar la siguiente:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2	3	4	5	6

Ahora buscamos en el plano cartesiano los puntos correspondientes a las parejas ordenadas $(x, f(x))$ que se anotaron en la tabla.



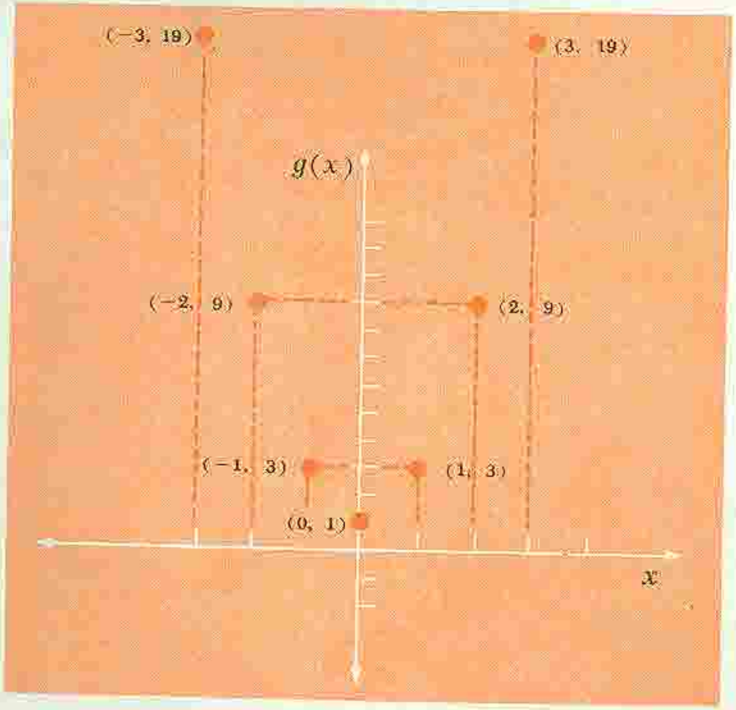
Este subconjunto de puntos del plano cartesiano es lo que se denomina **la gráfica de la función f**. (Observe usted que se toman como abscisas los elementos del dominio y como ordenadas las imágenes de esos elementos.)

Ejemplo. Sea g una función tal que $x \to g(x) = 2x^2 + 1$, cuyo dominio tenga los elementos -3, -2, -1, 0, 1, 2 y 3.

Podemos construir la siguiente tabla para describir esta función g:

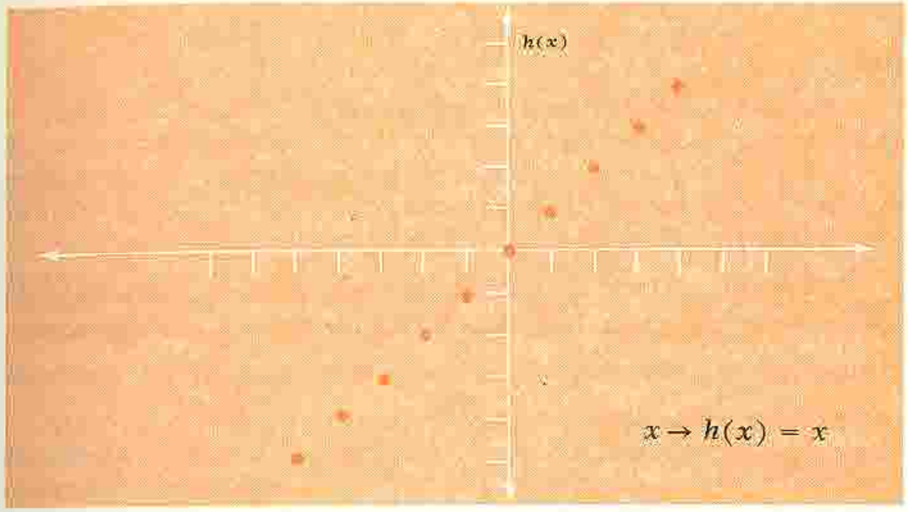
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	19	9	3	1	3	9	19

Ahora, si trazamos en un plano cartesiano los puntos cuyas coordenadas son $(x, g(x))$, vemos que la gráfica de la función es:



Ejercicio 21. Trace en papel milimétrico las gráficas de las funciones señaladas con los incisos a, b, c, d y h en el ejercicio número 19.

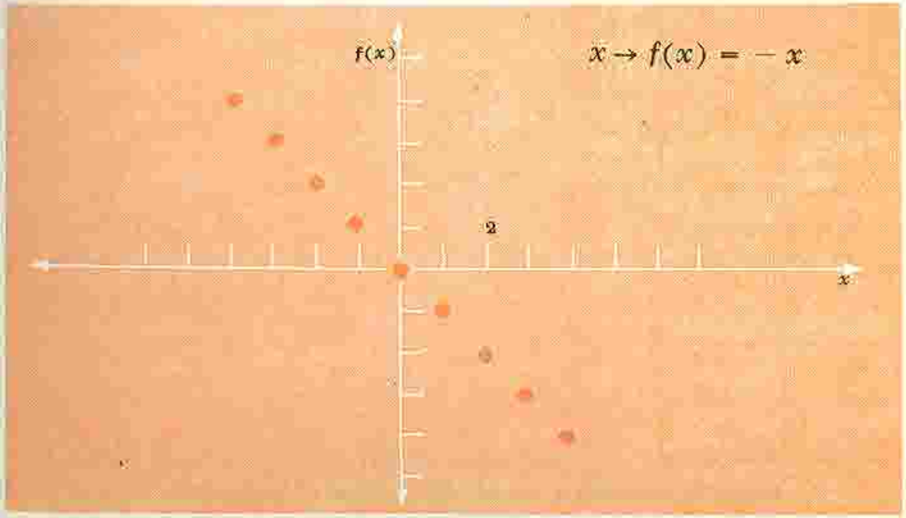
También por medio de una gráfica es posible, a primera vista, conocer, o reconocer, los elementos del dominio de una función y sus correspondientes imágenes; por ejemplo, si la siguiente gráfica corresponde a una función h,



y deseamos conocer los elementos de su dominio, nos basta con localizar las abscisas de los puntos; si queremos saber cuáles son las imágenes, buscamos las ordenadas de los puntos. Así entonces hallamos que la tabla que describe a esta función h es la siguiente:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$h(x)$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

Ejercicio 22. Observe la siguiente gráfica de la función f y complete las expresiones de abajo.



a) $f(\ 2) =$ ■

b) $f(\ 0) =$ ■

c) $f(-1) =$ ■

d) $f(\ 3) =$ ■

e) $f(-4) =$ ■

f) $f($■$) = -1$

g) $f($■$) = 2$

h) $f($■$) = 3$

i) $f($■$) = -4$

Ejercicio 23. Trace un sistema de coordenadas en una hoja de papel milimétrico y haga la gráfica de las funciones g y h siguientes:

Dominio de $g = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

Definición: $x \rightarrow g(x) = -2x$

Dominio de $h = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

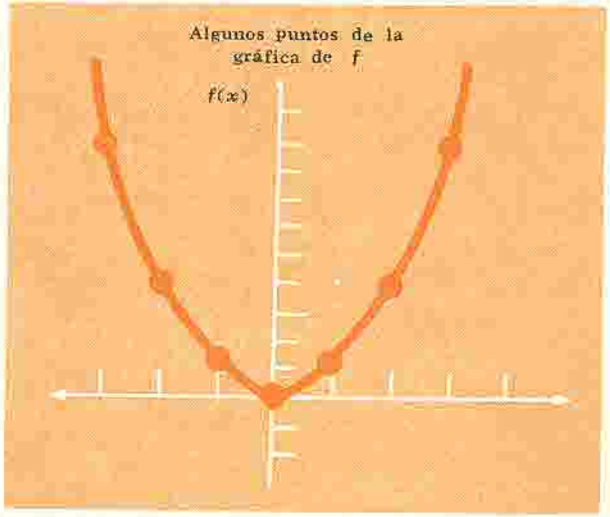
Definición: $x \rightarrow h(x) = -x - 3$

Observe la gráfica. ¿Qué se puede decir de los puntos de las funciones g y h cuya abscisa es 3?

En ocasiones se toma como dominio y codominio de una función toda la recta numérica. Por ejemplo, consideremos una función f tal que $x \mapsto f(x) = x^2$ cuyo dominio y codominio sea la recta numérica completa. Es claro que en este caso no podemos dibujar todos los puntos de la gráfica; pero sí es posible trazar algunos de ellos, como se ve a continuación:

Tabla de f

x	$f(x)$
−3	9
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4
3	9



Funciones lineales

Algunas gráficas de funciones reciben nombres especiales. Así, la gráfica del ejemplo anterior se llama *parábola*. Hay funciones cuya gráfica es una línea recta y a las cuales, por esta razón, se les acostumbra llamar *funciones lineales*. Estas funciones tienen como dominio y codominio toda la recta numérica y las imágenes son de la forma

$$f(x) = ax + b$$

en donde a y b representan números racionales cualesquiera.

Ejemplo. Todas las funciones enunciadas a continuación son funciones lineales si se considera la recta numérica como dominio y codominio de ellas.

a) $x \mapsto f(x) = 2x - 3$

b) $x \mapsto f(x) = -3x - 5$

c) $x \mapsto f(x) = -x - 3$

d) $x \mapsto f(x) = -2x$

e) $x \mapsto f(x) = -5x$

f) $x \mapsto f(x) = -x$

g) $x \mapsto f(x) = 5$

Ejercicio 24. Como ya se dijo, cada una de las funciones del ejemplo anterior es de la forma $x \mapsto f(x) = ax + b$. Diga, en cada inciso de ese ejemplo, qué número representa la a y qué número representa la b.

En vista de que la gráfica de una función lineal es una línea recta (esto será demostrado en cursos posteriores), para determinar la gráfica de una función lineal dada, basta con localizar dos de sus puntos.

Ejercicio 25. Trace la gráfica de las siguientes funciones lineales.

a) $x \mapsto g(x) = x - 3$

b) $x \mapsto f(x) = -2x - 2$

c) $x \mapsto h(x) = 3x$

d) $x \mapsto g(x) = -x$

e) $x \mapsto f(x) = 2$

f) $x \mapsto g(x) = 3x - 1$

g) $x \mapsto f(x) = -x - 3$

h) $x \mapsto g(x) = -5x$

i) $x \mapsto h(x) = -x - 1$

j) $x \mapsto f(x) = -4$

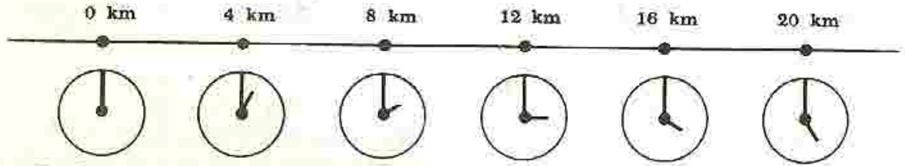
La función lineal y el movimiento uniforme

Galileo Galilei, ilustre físico, astrónomo y matemático italiano, describía el movimiento uniforme de la siguiente manera:

"Por movimiento uniforme entiendo aquel en el que las distancias recorridas por un objeto en movimiento son iguales durante cualquier conjunto de intervalos de tiempo iguales."

Así, una persona que camina una distancia determinada durante un periodo de tiempo, sin aumentar o disminuir el paso en su recorrido, se mueve uniformemente.

El estudio de este tipo de movimiento puede efectuarse más fácilmente si aplicamos a él las ideas que llevamos estudiadas en este capítulo. Por ejemplo, si una persona, moviéndose uniformemente recorre 4 kilómetros en una hora, en dos horas recorre 8 kilómetros, en tres horas, 12 kilómetros, en cuatro horas, 16 kilómetros y en cinco horas, 20 kilómetros.



Podemos llamar t al número de horas que la persona camina y entonces la distancia que recorre debe ser $4t$. Esto nos permite describir el movimiento de la persona con la siguiente función f:

Dominio de f = {intervalos de tiempo entre 0 y 5 horas inclusive}

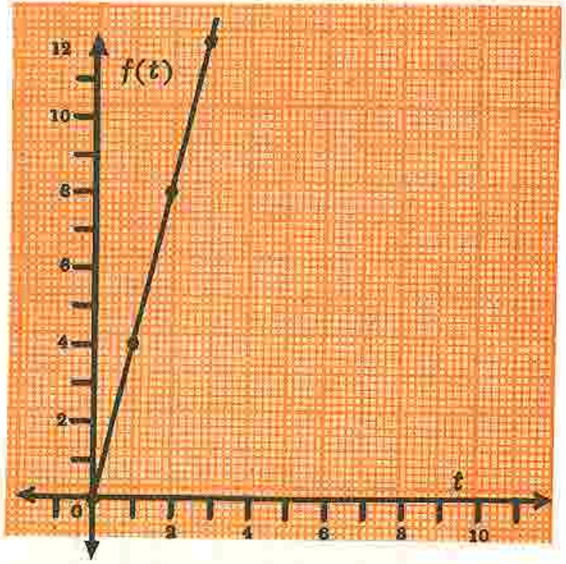
Codominio de f = {distancias recorridas}

Definición de f: $t \mapsto f(t) = 4t$

Tabla para f

t	$f(t)$
0	0
1	4
2	8
3	12
4	16
5	20

Gráfica de f



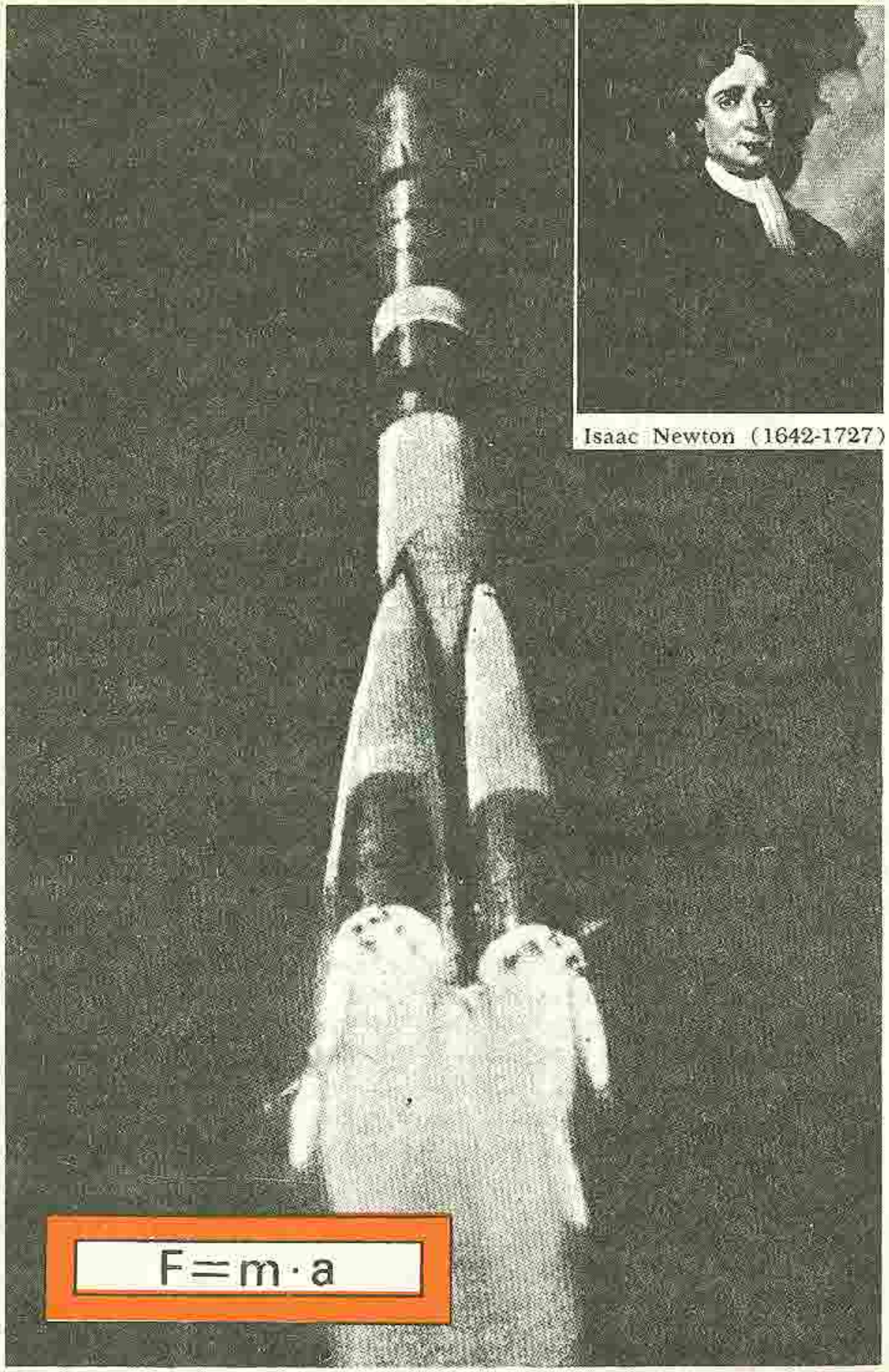
f es una función lineal y observando su gráfica podemos obtener datos del movimiento que describe sin recurrir al cálculo. Si nos preguntan "¿En qué tiempo esta persona, del ejemplo, recorrió 6 kilómetros?", buscamos la abscisa del punto cuya ordenada es 6 y contestamos: "En una hora y media". Si nos preguntan: "¿Qué distancia recorre en media hora?", buscamos la ordenada del punto cuya abscisa es ½ y contestamos: "Recorre dos kilómetros".

Ejercicio 26. Si un automóvil recorre, en movimiento uniforme, un kilómetro cada minuto,

a) Indique la función que describe el movimiento de este automóvil.
b) Construya la gráfica de la función.
c) Observe la gráfica y diga qué distancia recorrió el vehículo en 10 minutos, qué distancia recorrió en 2.5 minutos, qué distancia recorrió en ¾ de minuto, qué tiempo tardó en recorrer 6.5 kilómetros, qué tiempo tardó en recorrer 2¼ kilómetros.
d) ¿Qué interpretación se puede dar al punto (0, 0) de la gráfica?
e) ¿Se puede atribuir algún significado a los puntos que tienen abscisa y ordenada negativas?

Ejercicio 27. En un camino recto, Juan empieza a caminar con un movimiento uniforme de 3 kilómetros por hora. Pasa una hora y, por el mismo camino, José empieza a avanzar tras de Juan con movimiento uniforme de 4 kilómetros por hora.

a) Exprese las funciones que describen estos dos movimientos y trace sus gráficas en un mismo sistema de coordenadas.
b) Observe las gráficas y diga a qué distancia se encuentra Juan de José después de dos horas. ¿Y después de tres horas? ¿En qué punto se intersecan las dos gráficas? ¿Qué significado le podemos dar a este punto de intersección?



Las ecuaciones son de gran utilidad para describir fenómenos.

QUINTA UNIDAD

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

OBJETIVOS PARTICULARES

Al concluir el desarrollo de la presente unidad, el alumno:

I. Resolverá ecuaciones de primer grado a partir de situaciones concretas.
II. Establecerá el concepto de igualdad analizando sus propiedades.
III. Aplicará las propiedades de la igualdad en la solución de ecuaciones y fórmulas de primer grado con una incógnita.
IV. Resolverá problemas de aplicación de los conocimientos anteriores.

1. SOLUCION DE UNA ECUACION

En el planteamiento de muchos problemas aparecen ecuaciones como las siguientes:

$$3x = 12 \qquad x + 3 = 7 \qquad 2x + 7 = 15 \qquad x - 1 = 2x - 7$$

$$ax = c \qquad ax + b = c \qquad x + a = b \qquad \frac{a}{x} = b.$$

Ecuaciones como éstas reciben el nombre de **ecuaciones de primer grado en una incógnita.**

Independientemente del problema del cual haya aparecido una ecuación de éstas siempre podemos pensar en ella como en un problema relativo a números.

Por ejemplo, la ecuación $x + 3 = 7$ puede interpretarse como el problema

¿Qué número más 3 es igual a 7?

La ecuación $3x = 12$ es la pregunta.

Si tres veces un número es 12 ¿cuál es ese número?

La ecuación $2t + 1 = 5$ es la pregunta.

Si dos veces un número, más 1 es igual a cinco, ¿cuál es ese número?

La *solución* de la ecuación es el número que responde a la pregunta respectiva.

Por ejemplo, la solución de

$$x + 3 = 7$$

es 4 porque 4 es el número que sumado con 3 da 7.

La solución de $2y = 8$ es 4 pues 2 veces 4 es igual a 8; en símbolos $2 \times 4 = 8$.

Ejercicio 1. Diga cuál es la solución de cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $x + 3 = 12$ La solución es 9 porque $9 + 3 = 12$

b) $2x = 1$ La solución es $\frac{1}{2}$ porque $2 \times \frac{1}{2} = 1$

c) $-2x = 6$ La solución es (-3) porque $(-2)(-3) = 6$

d) $x + 1 = 10$ e) $x - 1 = 6$ f) $x + 2 = 4$

g) $x + 2 = 2$ h) $x + 2 = 0$ i) $x - 3 = 1$

j) $3x = 9$ k) $-3x = 9$ l) $-3x = -9$

En el ejercicio anterior y en los ejemplos, al número que en un principio desconocemos lo hemos denotado con x (por seguir la costumbre). Pero lo podemos denotar con cualquier otra letra o símbolo. A esta letra se le acostumbra llamar la *incógnita* (no conocida). Y se habla de ecuaciones *en una incógnita* cuando desconocemos un solo número.

Continuemos el ejercicio anterior utilizando otras letras para designar la incógnita.

Ejercicio 2. Diga cuál es la solución de cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $y + 3 = 19$ b) $z - 3 = 15$ c) $u + 9 = 0$

d) $u - 7 = 12$ e) $3x = 2$ f) $7u = -14$

g) $-5w = -5$ h) $7y = -7$ i) $-2v = -12$

En los ejercicios anteriores usted encontró la solución de algunas ecuaciones simplemente observándolas. Esto se pudo hacer porque las ecuaciones son muy simples. Pero en otras ecuaciones más complicadas no es tan fácil decir a simple vista cuál es la solución. Por ejemplo, la solución de la ecuación

$$3(x - 1) - 2(x - 2) + 2(x - 5) = 6$$

es 5. Pero ¿cómo llegar a este resultado?

En esta unidad nos ocuparemos de encontrar las soluciones de las ecuaciones de primer grado en una incógnita.

Pero por de pronto, en esta sección, seguiremos ocupándonos de ver cuándo un número es solución de una ecuación y cuándo no lo es.

Ejemplo. ¿Es 5 efectivamente solución de la ecuación anterior?

Si 5 es solución, al sustituir 5 en lugar de x en el miembro izquierdo, nos debe dar 6. Veamos si es así:

$$\begin{aligned} 3(5 - 1) - 2(5 - 2) + 2(5 - 5) &= 3 \times 4 - 2 \times 3 + 2 \times 0 \\ &= 12 - 6 + 0 = 6. \end{aligned}$$

Por lo tanto 5 sí es solución de la ecuación dada.

Ejemplo. ¿Es 10 solución de la ecuación $1.5(x + 8) + 6 = 30$?

Sustituimos 10 en lugar de x:

$$1.5(10 + 8) + 6 = 1.5(18) + 6 = 27 + 6 = 33 \neq 30$$

Por lo tanto 10 no es solución de dicha ecuación.

Ejemplo. ¿Es 5 solución de la ecuación siguiente?

$$3(x - 1) - 2(x - 2) + 2(x - 5) = 2x - 4$$

Sustituimos 5 en lugar de x en el miembro izquierdo de la ecuación. Obtenemos

$$\begin{aligned} 3(5 - 1) - 2(5 - 2) + 2(5 - 5) &= 3 \times 4 - 2 \times 3 + \\ &+ 2 \times 0 = 6. \end{aligned}$$

Sustituimos ahora 5 en lugar de x en el miembro derecho:

$$2 \times 5 - 4 = 6.$$

Por lo tanto,

$$3(5 - 1) - 2(5 - 2) + 2(5 - 5) = 2 \times 5 - 4,$$

es decir, 5 sí es solución de la ecuación dada.

Ejemplo. ¿Es -3 solución de la siguiente ecuación?

$$-2x + 5(x - 1) + 3 = 4x + 2$$

Miembro izquierdo:

$$(-2)(-3) + 5(-3 - 1) + 3 = 6 + 5(-4) + 3 = 6 - 20 + 3 = 9 - 20 = -11.$$

Miembro derecho:

$$4(-3) + 2 = -12 + 2 = -10.$$

Como $-11 \neq -10$, el número -3 no es solución.

Ejercicio 3. Procediendo como en los ejemplos anteriores diga si el número propuesto es o no solución de la ecuación dada.

	número	ecuación
a)	5	$3w + 6 = 21$
b)	-2	$2y - 5 = 4y + 9$
c)	3	$7(z + 9) - 4(z + 5) = 8(z + 4) - 4$
d)	12	$\frac{x}{6} + 9 = 5 + 6$
e)	2	$3(x - 1) + 5(x + 2) = 7(x - 4) + 10x + 17$
f)	-3	$4w - 8(w + 3) = 7w + 3(w + 6)$
g)	5	$7w - 4(w + 3) = 6w - 2(w + 1)$
h)	2	$\frac{3x}{2} + 4x = 5(x - 3) + 6(x + 1) - 2$
i)	3	$2z + 9 - 5(z + 3) = -2z + 6$
j)	5	$8(w - 3) + 6 = 3w + 2(w + 2) - 7$
k)	2	$4x - 3 = 6(x + 3) - 8$
l)	3	$4z + 7 = 8(z - 1) - 2z - 5$
m)	12	$6x - 3x = 4x - 9$
n)	2	$5y - 3(y + 4) = 8y$
ñ)	2	$4x - 3 = x + 3$
o)	$\frac{1}{2}$	$3(x - 5) - 8(x + 6) - 5 = 4x$
p)	5	$0.3t - 0.8t = 0.6t - 5.5$
q)	0.6	$2(w - 1) + 5w = -3w - 0.4$
r)	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}\left(r + \frac{1}{3}\right) + 2\left(r - \frac{5}{3}\right) = -\frac{21}{4}$

2. ECUACIONES EQUIVALENTES

En uno de los ejemplos anteriores comprobamos que 5 es solución de la ecuación

$$(1) \qquad 3(x - 1) - 2(x - 2) + 2(x - 5) = 2x - 4.$$

Pero también este número 5 es solución de la ecuación

$$(2) \qquad 3x - 9 = 2x - 4.$$

(Efectivamente $3 \times 5 - 9 = 15 - 9 = 6$ y $2 \times 5 - 4 = 10 - 4 = 6$.)

También 5 es solución de

$$(3) \qquad x - 9 = -4$$

(pues, en efecto, $5 - 9 = -4$).

Asimismo, 5 es solución de

$$(4) \qquad x = 5$$

(en efecto, $5 = 5$).

Así, las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) tienen todas la misma solución, el número 5.

Para facilitar el lenguaje,

> *Cuando dos o más ecuaciones tengan la misma solución diremos que son equivalentes.*

Así pues, si tenemos varias ecuaciones que sabemos que son equivalentes y conocemos la solución de una de ellas, conocemos la solución de todas ellas.

Esta idea tan simple nos servirá para resolver las ecuaciones. Lo que haremos será, a partir de la ecuación dada, obtener ecuaciones equivalentes a ella, cada vez más simples, hasta que lleguemos a una tan simple que podamos decir de inmediato cuál es su solución.

Las siguientes propiedades nos permiten realizar lo anterior.

> *Si a los dos miembros de una ecuación se les suma (o se les resta) un mismo número se obtiene una ecuación equivalente a la primera (es decir, ambas tienen la misma solución).*

Ejemplo. Consideremos la ecuación

$$2x + 5 = 11.$$

Si sumamos 4 a los dos miembros de la ecuación obtenemos

$$2x + 5 + 4 = 11 + 4,$$

es decir, obtenemos la ecuación

$$2x + 9 = 15.$$

Podemos comprobar que ambas tienen al mismo número 3 por solución:

$$2 \times 3 + 5 = 6 + 5 = 11$$
$$2 \times 3 + 9 = 6 + 9 = 15.$$

Ejemplo. Consideremos la misma ecuación anterior

$$2x + 5 = 11.$$

Si restamos 5 a los dos miembros obtenemos la ecuación

$$2x + 5 - 5 = 11 - 5$$

es decir, después de simplificar obtenemos

$$2x = 6.$$

Esta ecuación tiene por solución 3, como lo podemos ver fácilmente. Y como 3 es también la solución de la primera ecuación vemos que las dos ecuaciones son equivalentes.

Esta propiedad de las ecuaciones es consecuencia de la siguiente propiedad entre números:

> *Si a, b y c son números tales que*
>
> $$a + c = b + c,$$
>
> *entonces*
>
> $$a = b.$$

Esta propiedad se conoce como **ley de cancelación para la adición.** Utilizando algunas propiedades de los números, que ya conocemos, demostraremos ahora esta ley.

Supongamos que a, b y c son números tales que

$$a + c = b + c$$

A este número le sumamos el inverso aditivo de c. Obtenemos

$$(a + c) + (-c) = (b + c) + (-c).$$

Según la propiedad asociativa de la adición podemos entonces escribir

$$a + (c + (-c)) = b + (c + (-c))$$

y como $c + (-c) = 0$, obtenemos

$$a + 0 = b + 0$$

por lo que

$$a = b.$$

Ejercicio 4. Sumando (o restando) un mismo número a los dos miembros de la ecuación dada en cada inciso, obtenga ecuaciones equivalentes. Trate de sumar números (o restar) de tal manera que las ecuaciones obtenidas le parezcan más simples.

a) $7x - 15 = 34$

b) $-9 + 7y = 5$

c) $\frac{3}{4}z - \frac{7}{2} = -\frac{5}{3}z$

d) $-9u + 27 = 3u - 21$

e) $3x + 8 - 6x = 8x + 30$

f) $6t + 12 = 4t - t$

Ahora veremos otra propiedad de las ecuaciones que, como la anterior, nos permitirá encontrar ecuaciones equivalentes a una ecuación dada.

> *Si los dos miembros de una ecuación se multiplican (o dividen) por un mismo número distinto de cero se obtiene una ecuación equivalente a la primera (es decir, ambas tienen la misma solución)*

Ejemplo. Consideremos la ecuación

$$7x + 14 = 35.$$

Si multiplicamos, por ejemplo, por 3 los dos miembros de la ecuación obtenemos la nueva ecuación

$$3(7x + 14) = 3 \times 35,$$

es decir,

$$21x + 42 = 105.$$

Las dos ecuaciones tienen la misma solución, el número 3, como podemos comprobar:

$$7 \times 3 + 14 = 21 + 14 = 35$$
$$21 \times 3 + 42 = 63 + 42 = 105.$$

Ejemplo. Consideremos la misma ecuación de antes,

$$7x + 14 = 35.$$

Si dividimos los dos miembros de la ecuación entre 7 obtenemos la ecuación

$$\frac{7x + 14}{7} = \frac{35}{7},$$

es decir, después de simplificar,

$$x + 2 = 5$$

Fácilmente observamos que esta última ecuación tiene también a 3 como solución. Es equivalente a la ecuación original.

La propiedad anterior es consecuencia de la siguiente propiedad entre números:

> *Si a, b y c son números tales que*
>
> $$ac = bc \qquad y \qquad c \neq 0$$
>
> *entonces*
>
> $$a = b$$

Esta propiedad se conoce como **ley de cancelación para la multiplicación**. Utilizando algunas propiedades de los números, que ya conocemos, demostraremos ahora esta ley.

Supongamos que a, b y c son números tales que

$$ac = bc \qquad \text{y} \qquad c \neq 0.$$

Como $c \neq 0$, c tiene inverso multiplicativo $\frac{1}{c}$. Multiplicamos el número $ac = bc$ por $\frac{1}{c}$ y obtenemos

$$(ac)\,\frac{1}{c} = (bc)\,\frac{1}{c}.$$

Según la propiedad asociativa de la multiplicación podemos entonces escribir

$$a\left(c \cdot \frac{1}{c}\right) = b\left(c \cdot \frac{1}{c}\right)$$

y como $c \cdot \frac{1}{c} = 1$, obtenemos

$$a \cdot 1 = b \cdot 1,$$

por lo que

$$a = b.$$

Ejercicio 5. Multiplicando (o dividiendo) por un mismo número (distinto de cero) los dos miembros de la ecuación dada en cada inciso, obtenga ecuaciones equivalentes.

a) $3x - 6 = 12$
b) $24x = -48$
c) $-7x + 21 = -49$
d) $2x + 27 = -19$
e) $\frac{1}{2}x = \frac{3}{4}$
f) $\frac{x - 1}{3} = \frac{7}{9}$

3. RESOLUCION DE ECUACIONES

Como vimos en las secciones anteriores, algunas ecuaciones de primer grado son muy fáciles de resolver. Por ejemplo,

$$2x = 6, \qquad x + 3 = 5, \qquad \frac{1}{2}x = 7, \qquad x = 9.$$

Una simple inspección nos indica que 3 es solución de la primera, 2 de la segunda, 14 de la tercera y 9 es solución de la cuarta ecuación.

Sin embargo, la mayor parte de ecuaciones que aparecen al resolver problemas no son tan simples como ésas. Para resolver ecuaciones más complicadas usaremos, según se dijo, las dos propiedades de las ecuaciones mencionadas en la sección anterior.

Como ahí se indicó, para resolver una ecuación iremos obteniendo ecuaciones equivalentes a ella, cada vez más simples, hasta que lleguemos a alguna tan simple que podamos decir de inmediato cuál es la solución.

Ecuaciones de la forma $ax + b = c$.

Ejemplo 1. Consideremos la ecuación

$$2x + 9 = 21.$$

Restamos 9 a ambos miembros de la ecuación y obtenemos la ecuación equivalente

$$2x + 9 - 9 = 21 - 9.$$

Esta ecuación, después de simplificar, se escribe así:

$$2x = 12.$$

Dividimos ahora entre 2 los dos miembros de la ecuación y obtenemos la siguiente ecuación, equivalente a las anteriores:

$$\frac{2x}{2} = \frac{12}{2}.$$

Después de simplificar queda

$$x = 6$$

Y aquí vemos ya que la solución de esta ecuación es 6. Por lo tanto, todas las anteriores, y en particular la ecuación dada, tienen por solución el número 6.

Comprobación. $2 \times 6 + 9 = 12 + 9 = 21.$

Ejemplo 2. Para resolver la ecuación

$$3x - 14 = -2$$

podemos empezar sumando 14 a los dos miembros de la ecuación. Obtenemos la ecuación equivalente

$$3x - 14 + 14 = -2 + 14.$$

Simplificando las expresiones en cada miembro, esta ecuación se puede escribir así:

$$3x = 12.$$

En este paso podemos darnos cuenta de que la solución es 4 pues $3 \times 4 = 12$. Si no nos diéramos cuenta de esto, podríamos dividir entre 3 los dos miembros de la ecuación y obtener la ecuación equivalente a las anteriores

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$$

que al simplificar, queda

$$x = 4.$$

Aquí sí vemos ya que la solución es 4.

Comprobación. $3 \times 4 - 14 = 12 - 14 = -2.$

Ejemplo 3. Resolvamos la ecuación

$$-21 = 15x + 9.$$

Restamos 9 a los dos miembros de la ecuación y obtenemos la ecuación equivalente

$$-21 - 9 = 15x + 9 - 9.$$

Simplificando, esta ecuación adquiere la forma

$$-30 = 15x.$$

Dividiendo entre 15 obtenemos otra ecuación equivalente a todas las anteriores, que es

$$\frac{-30}{15} = \frac{15x}{15},$$

la cual, después de efectuar las operaciones indicadas se ve así:

$$-2 = x.$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación dada es -2.

Ejemplo 4. Consideremos la ecuación

$$3(x - 2) + 14 = -3 + 32.$$

Efectuamos la multiplicación de $3(x - 2)$, es decir, aplicamos la propiedad distributiva: $3(x - 2) = 3x - 3 \times 2 = 3x - 6$. Al hacer esto, la ecuación original se escribe en la forma

$$3x + 8 = 29.$$

Restamos ahora 8 a ambos miembros y obtenemos la ecuación equivalente

$$3x + 8 - 8 = 29 - 8,$$

es decir, la ecuación

$$3x = 21.$$

Aquí podemos dividir entre 3 y obtener

$$x = 7.$$

Ejemplo 5. Consideremos la ecuación

$$\frac{3}{5}\left(\frac{4}{2} - z\right) = \frac{9}{10}.$$

Primero aplicamos la propiedad distributiva al miembro izquierdo para reescribir así la ecuación dada:

$$\frac{3}{5} \times \frac{4}{2} - \frac{3}{5}z = \frac{9}{10}.$$

Es decir, obtenemos

$$\frac{12}{10} - \frac{3}{5}z = \frac{9}{10}.$$

Restamos $\frac{12}{10}$ a ambos miembros y obtenemos la ecuación equivalente

$$\frac{12}{10} - \frac{12}{10} - \frac{3}{5}z = \frac{9}{10} - \frac{12}{10},$$

obtenemos la ecuación

$$-\frac{3}{5}z = -\frac{3}{10}.$$

Dividimos entre $-\frac{3}{5}$ ambos miembros y obtenemos

$$z = \left(-\frac{3}{10}\right) \div \left(-\frac{3}{5}\right)$$

es decir,

$$z = \frac{3}{10} \div \frac{3}{5} = \frac{3 \times 5}{3 \times 10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

O sea, la solución de la ecuación es $\frac{1}{2}$.

Comprobación.

$$\frac{3}{5}\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{5}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{10}.$$

Ejemplo 6. Consideremos la ecuación

$$0.2(x + 1.50) + 0.75 = 1.10.$$

Utilizando la propiedad distributiva, esta misma ecuación se puede escribir así:

$$0.2x + 0.2 \times 1.50 + 0.75 = 1.10.$$

es decir, así:

$$0.2x + 0.30 + 0.75 = 1.10$$

o bien,

$$0.2x + 1.05 = 1.10.$$

Restamos ahora 1.05 a los dos miembros y obtenemos la ecuación equivalente

$$0.2x = 1.10 - 1.05$$

es decir,

$$0.2x = 0.05.$$

Dividiendo entre 0.2 los dos miembros de la ecuación obtenemos

$$x = \frac{0.05}{0.2}$$

es decir,

$$x = 0.25.$$

Comprobación.

$$0.2(0.25 + 1.50) + 0.75 = 0.2(1.75) + 0.75 = 0.35 + 0.75 = 1.10.$$

Ejemplo 7. Para resolver la ecuación

$$\frac{3x + 7}{4} - 19 = -21,$$

podemos primero sumar 19 a ambos miembros de la ecuación y obtener la ecuación equivalente

$$\frac{3x+7}{4} = -21 + 19,$$

es decir.

$$\frac{3x+7}{4} = -2.$$

Podemos ahora multiplicar por 4 los dos miembros de ésta y obtener otra ecuación equivalente.

$$4 \times \frac{3x+7}{4} = (-2)4.$$

Al simplificar las expresiones, esta última ecuación adquiere la forma

$$3x + 7 = -8.$$

Restamos 7 a los dos miembros y obtenemos

$$3x = -8 - 7,$$

es decir,

$$3x = -15.$$

Dividimos entre 3 y obtenemos

$$x = -5.$$

Ejemplo 8. La ecuación

$$\frac{20}{x} - 19 = 21$$

puede resolverse así. Sumamos primero 19 a los dos miembros y obtenemos la ecuación equivalente

$$\frac{20}{x} - 19 + 19 = 21 + 19,$$

es decir,

$$\frac{20}{x} = 40.$$

Multiplicamos por x los dos miembros (suponemos $x \neq 0$) y obtenemos le ecuación equivalente

$$\frac{20x}{x} = 40x$$

es decir,

$$20 = 40x$$

Dividiendo entre 40 los dos miembros de la ecuación llegamos a

$$\frac{20}{40} = \frac{40x}{40}$$

Por lo tanto, la solución es $x = \frac{1}{2}$

Comprobación.

$$\frac{20}{\frac{1}{2}} - 19 = 20 \div \frac{1}{2} - 19 = 40 - 19 = 21.$$

Ejercicio 6. Procediendo de manera análoga a los ejemplos anteriores encuentre la solución de cada ecuación. Compruebe el resultado.

a) $7x + 8 = 43$
b) $31 = 5x - 9$
c) $6y + 6 = -18$
d) $42 = 7 + 5z$
e) $-5x + 6 = 31$
f) $10 + 5 = 3r + 3$
g) $-5t - 15 = 50 - 75$
h) $4x - 6 = -46$
i) $6a - 8 = -10$
j) $15z + 17 = 25 - 9$
k) $19 = 14 + 4w$
l) $45 = 18a + 9$
m) $-8z + 15 = 7$
n) $7x - 5 = 17$
ñ $6t + 18 = 0$
o) $5(y - 9) = -10$
p) $-4 = -2(r - 6)$
q) $-12(x + 7) = 0$
r) $5(t - 3) + 9 = 34$
s) $16 = 8(r - 1)$
t) $0 = -3(2a + 6)$
u) $5(4 - 2p) = 30$
v) $-7(5v - 8) + 46 = 16$
w) $12 = 6 - (2t + 7)$
x) $18 = 2(3y + 8) - 5$
y) $9 - 5(2r - 6) = 19$
z) $17 - (s - 9) = 11$

Ejercicio 7. De manera análoga a los ejemplos, encuentre la solución de cada ecuación y compruébela.

a) $\frac{6a}{5} - 3 = 9$
b) $\frac{2}{3}x = 8$
c) $-65 = 13 + \frac{7z}{12}$
d) $-4(t + 5) = 0$
e) $-9(v - 5) + 34 = 63$

f) $\frac{3}{7}t + 8 = 17$

g) $\frac{t + 6}{2} = 7$

h) $\frac{3w - 5}{8} = 2$

i) $0 = 8 - \frac{2t}{6}$

j) $0 = \frac{8y + 24}{5}$

k) $\frac{72}{w} = -6$

l) $\frac{27}{y} - 5 = 4$

m) $12 - \frac{15}{t} = 7$

n) $1 = \frac{16}{x}$

ñ) $0.7r = 0.21$

o) $2.5t = 0.5$

p) $1.8y - 4.3 = 2.9$

q) $0.35z - 0.56 = 0.14$

r) $5a - 1.3 = 18.7$

s) $\frac{w}{0.6} + 0.8 = 3.2$

t) $\frac{s}{2.7} + 3.8 = 0.2$

u) $0.5x + 0.6 = 1.8$

v) $0.75z - 0.84 = -0.67$

w) $0.9 = 2.6t + 1.8$

x) $\frac{0.7y}{0.6} - 3.7 = 6.4$

y) $6.5 = \frac{13}{r}$

z) $\frac{0.9}{v} - 1.5 = 0.3$

En el estudio de muchos fenómenos de la naturaleza nos encontramos con expresiones como las siguientes

$$s = vt + \frac{1}{2}at^2, \qquad M = C + \frac{Cnt}{P}, \qquad d = vt.$$

En la última, $d = vt$, se expresa la relación entre la distancia d que recorre un cuerpo en movimiento uniforme, la velocidad v y el tiempo t.

En expresiones como éstas podemos considerar como incógnita a cualquiera de las letras que figuran. Por ejemplo, si en $d = vt$ consideramos como incógnita a v podemos resolver la ecuación y encontrar v en términos de las demás. Para ello dividimos los dos miembros de la ecuación entre t (que supondremos distinto de cero) y obtenemos

$$\frac{d}{t} = \frac{vt}{t},$$

es decir, obtenemos

$$\frac{d}{t} = v$$

o, lo que es lo mismo,

$$v = \frac{d}{t}.$$

A veces se refieren a este proceso diciendo que "en la fórmula $d = vt$ se ha *despejado* v, para obtener $v = \frac{d}{t}$".

Ejemplo 9. Despejar t en la fórmula $d = vt$ significa resolver la ecuación $d = vt$ considerando a t como incógnita. Se puede proceder así:

Dividimos ambos miembros de la ecuación entre v (que debemos suponer $\neq 0$) y obtenemos

$$\frac{d}{v} = \frac{vt}{v}$$

es decir,

$$\frac{d}{v} = t.$$

En otras palabras, al despejar t en la fórmula $d = vt$ se obtiene

$$t = \frac{d}{v} \qquad (\text{si } v \neq 0).$$

Ejemplo 10. Al despejar m en la célebre fórmula que aparece en la teoría de la relatividad

$$E = mc^2$$

se obtiene

$$m = \frac{E}{c^2}, \qquad (c \neq 0).$$

Ejercicio 8. En cada una de las siguientes fórmulas despeje la letra que se indica.

a) $ax - t = 3y \qquad x$

b) $v = \frac{d}{t} \qquad d$

c) $v = \frac{d}{t} \qquad t$

d) $i = \frac{cnt}{p} \qquad n$

e) $E = mc^2 \qquad m$

f) $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \pi$

g) $PV = P'V' \qquad V'$

h) $F = \frac{9}{5}C + 32 \qquad C$

i) $A = bh \qquad b$

j) $V = \frac{1}{3}abh \qquad a$

k) $P = \frac{F}{A} \qquad A$

l) $W = mg \qquad m$

m) $E = \frac{F}{Q} \qquad Q$

n) $C = \frac{Q}{V} \qquad Q$

o) $S = Vt + \frac{1}{2}at^2 \qquad V$

p) $A = \frac{bh}{2} \qquad b$

q) $V = \frac{hr^2}{3} \qquad h$

r) $M = c + \frac{cnt}{p} \qquad t$

s) $A = \frac{h(B + b)}{2} \qquad h$

t) $K = C + 273 \qquad C$

Ejemplo 10. Resolvamos la ecuación

$$ax + b = 0, \qquad (a \neq 0).$$

Restamos b a los dos miembros de la ecuación y encontramos la ecuación equivalente a la anterior

$$ax + b - b = 0 - b.$$

Simplificamos esta ecuación y obtenemos

$$ax = -b.$$

Dividimos ahora los dos miembros de la ecuación entre a (lo podemos hacer pues $a \neq 0$) y obtenemos la ecuación equivalente

$$\frac{ax}{a} = \frac{-b}{a}$$

que escrita de otra manera es

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Así pues hemos demostrado que
La ecuación

$$ax + b = 0$$

tiene por solución

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Ejercicio 9. Procediendo como en el ejemplo anterior encuentre la solución de la ecuación

$$ax + b = c. \qquad (a \neq 0)$$

Ejemplo 11. Es frecuente encontrarse con ecuaciones en las que la incógnita aparece en varios sumandos. Por ejemplo,

$$7x - 3x = 28.$$

Si ahora recordamos que $7x - 3x = 4x$, podemos reescribir la ecuación dada así:

$$4x = 28.$$

Y aquí vemos que la solución es 7.

¿Recuerda por qué $7x - 3x = 4x$? Se usa la propiedad distributiva:

$$7x - 3x = (7 - 3)x = 4x.$$

Ejemplo 12. Consideremos la ecuación

$$-8y + 3 + 5y - 2 = 7.$$

La reescribimos así:

$$-8y + 5y + 3 - 2 = 7.$$

Usamos la propiedad distributiva

$$(-8 + 5)y + 3 - 2 = 7.$$

Simplificamos la expresión y obtenemos

$$-3y + 1 = 7.$$

Ahora resolvemos la ecuación como ya sabemos:

$$-3y = 7 - 1; \qquad -3y = 6; \qquad y = \frac{6}{-3}; \qquad y = -2.$$

Ejemplo 13. Resolvamos la ecuación

$$3(x - 1) - 2(x - 2) + 2(x - 5) = 6.$$

Primero utilizamos la propiedad distributiva para efectuar las multiplicaciones indicadas y "quitar paréntesis", como se dice usualmente. La ecuación queda así:

$$3x - 3 - 2x + 4 + 2x - 10 = 6.$$

La reescribimos así:

$$3x - 2x + 2x - 3 + 4 - 10 = 6.$$

Como $-2x + 2x = 0$, escribimos

$$3x - 9 = 6.$$

Al resolver ésta con el método usual obtenemos

$$3x = 6 + 9; \qquad 3x = 15; \qquad x = 5.$$

Ejemplo 14. Para resolver la ecuación

$$\frac{3}{4}\left(x + \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}x = \frac{9}{4}$$

procedemos así. Primero "quitamos paréntesis", es decir efectuamos las multiplicaciones indicadas utilizando la propiedad distributiva:

$$\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \times \frac{3}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}x = \frac{9}{4}$$

$$\frac{3}{4}x + \frac{9}{8} + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4} + \frac{3}{2}x = \frac{9}{4}$$

$$\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}x + \frac{9}{8} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}.$$

Usamos nuevamente la propiedad distributiva para sumar los términos que tienen x:

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right)x + \frac{9}{8} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\frac{3 + 6 + 6}{4}x + \frac{9 - 6}{8} = \frac{9}{4}$$

$$\frac{15}{4}x + \frac{3}{8} = \frac{9}{4}.$$

Restamos ahora $\frac{3}{8}$ a los dos miembros y obtenemos la ecuación equivalente

$$\frac{15}{4}x = \frac{9}{4} - \frac{3}{8}$$

o sea,

$$\frac{15}{4}x = \frac{18 - 3}{8},$$

$$\frac{15}{4}x = \frac{15}{8}$$

de donde,

$$x = \frac{15}{8} \div \frac{15}{4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

La solución es $\frac{1}{2}$.

Ejercicio 10. Resuelva las siguientes ecuaciones y compruebe los resultados.

a) $2t + 8 - 6t = 20$

b) $34 = 8w - 16 - 9w$

c) $7y - 18 - 15y = 25 - 5$

d) $5(4x - 3) + 8x - 7 = 0$

e) $-36 + 17 = -6(t - 9) + 3t - (8 - t)$

f) $-3(w - 6) + 6(w + 8) - 4(w + 3 = 26 - 9$

g) $4z + 8z - 5(z + 3) = 18$

h) $28 + 9 = 4a - 9a - 15 - 6a$

i) $\frac{2}{5}b - \frac{7}{5}b + 10 - \frac{3}{5}b = 25$

j) $-16t - 13t + 15 = -43$

k) $8z + 27 - 12z + 40z = -34 - 62$

l) $\frac{2}{7}v - \frac{3}{7}(v + 14) + \frac{5}{7}(7 - 2v) = \frac{19}{7} + \frac{15}{7}$

m) $\frac{3}{4}w + \frac{5}{3}w = \frac{7}{2}$

n) $\frac{8}{5} - \frac{3}{10} = -\frac{7}{5}c - \frac{9}{10} + \frac{3}{10}c$

ñ) $\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right) = \frac{15}{4}y - \frac{11}{6}y$

o) $1.5t - 28 + 5.3t = 7.6$

p) $8y - 0.7y - 4.3 = 6.3 - 0.4$

q) $9.7 + 2 = 3.6 - 0.4w - 3w$

r) $6.4 - 18.6 = y + 6.75 - 3.42y$

s) $3.5(2.4 - 4.5y) - (6.34y - 0.68) = 63.28$

t) $-18.34 + 0.639 = -(0.63r + 4.18) + 3.5r$

u) $7.58(3x - 5) - 5(0.6x + 3.6) = -7.8$

v) $\frac{5(2y - 0.3)}{3} + \frac{4(5.6 + 3.2y)}{3} = 1.5$

w) $\frac{6.7(4z - 2)}{6} - \frac{2.8(3 - 5.2z)}{3} = -9.7$

x) $53 = 8(2x - 4) - (4x - 5) + 6$

y) $17 - 56 = \frac{4(2z - 7)}{5} - \frac{(6 - 5z)}{5}$

z) $16.8 - 63.3 = \frac{3.2(t - 1.7)}{2.3} - \frac{7.8 - 9.8t}{2.3}$

Ecuaciones de la forma

$$ax + b = cx + d.$$

Es frecuente encontrar ecuaciones en las que la incógnita figure en los dos miembros.

Ejemplo 15. Para resolver la ecuación

$$8x + 25 = 5x + 16$$

podemos proceder así. Restamos $5x$ a cada miembro y obtenemos la ecuación equivalente

$$8x + 25 - 5x = 5x + 16 - 5x,$$

es decir,

$$8x - 5x + 25 = 16,$$

la cual ya sabemos resolver:

$$\begin{aligned} (8 - 5)x &= 16 - 25 \\ 3x &= -9 \\ x &= -3. \end{aligned}$$

Ejemplo 16.

$$\begin{aligned} 0.9y - 1.6 &= 3.7y + 6.8 \\ 0.9y - 1.6 - 3.7y &= 3.7y + 6.8 - 3.7y \\ 0.9y - 3.7y - 1.6 &= 6.8 \\ (0.9 - 3.7)y &= 6.8 + 1.6 \\ -2.8y &= 8.4 \end{aligned}$$

Ejemplo 17. En ecuaciones como la siguiente

$$\frac{2t - 16}{5} + \frac{4t + 6}{15} = \frac{4t - 8}{20} - 1$$

es conveniente primero multiplicar los dos miembros de la ecuación por un múltiplo común de los denominadores, de preferencia por el mínimo común múltiplo, en este caso 60. Obtenemos la ecuación equivalente

$$60\left(\frac{2t - 16}{5}\right) + 60\left(\frac{4t + 6}{15}\right) = 60\left(\frac{4t - 8}{20}\right) - 60 \times 1.$$

Simplificando obtenemos

$$12(2t - 16) + 4(4t + 6) = 3(4t - 8) - 60.$$

Con esto, como suele decirse, "quitamos denominadores" en la ecuación. Y ahora la resolvemos como ya sabemos hacerlo:

$$\begin{aligned} 24t - 192 + 16t + 24 &= 12t - 24 - 60 \\ 40t - 168 &= 12t - 84 \\ 40t - 12t - 168 &= 12t - 12t - 84 \\ 28t - 168 &= -84 \\ 28t &= -84 + 168 \\ 28t &= 84 \\ t &= 3. \end{aligned}$$

Ejemplo 18. Algunas ecuaciones en las que figura x en el denominador son también de primer grado. Por ejemplo, la ecuación

$$\frac{6}{x} + \frac{5}{x} - 18 = \frac{3}{x} + 5.$$

Podemos resolverla así. Multiplicamos por x los dos miembros de la ecuación (debemos suponer $x \neq 0$) y obtenemos la ecuación equivalente

$$x\left(\frac{6}{x} + \frac{5}{x} - 18\right) = x\left(\frac{3}{x} + 5\right).$$

Utilizamos la propiedad distributiva para efectuar las multiplicaciones. Obtenemos

$$6 + 5 - 18\,x = 3 + 5x.$$

Y esta ecuación ya la sabemos resolver:

$$\begin{aligned} 11 - 18x - 5x &= 3 \\ -23x &= 3 - 11 \\ -23x &= -8 \\ x &= \frac{8}{23}. \end{aligned}$$

Ejemplo 19. Como último ejemplo consideremos la ecuación

$$ax + b = cx + d \quad (\text{con } a \neq c).$$

Podemos resolverla así:

$$\begin{aligned} ax + b - cx - b &= cx + d - cx - b \\ ax - cx &= d - b \\ (a - c)x &= d - b \\ x &= \frac{d - b}{a - c}. \end{aligned}$$

(Este último paso puede llevarse a cabo porque como $a \neq c$, $a - c$ es distinto de cero.)

Ejercicio 11. Resuelva las ecuaciones siguientes y compruebe los resultados.

a) $3x + 8 - 6x = 8x + 30$

b) $7y - 6y + 26 = -3y + 1 + 9y$

c) $3(y - 3) + 5(y + 2) - 18 = 7(2 - y) - 2(y + 3) + 3y + 3$

d) $9t - 12 + 6t = 10t + 7t - 24$

e) $-4r + 9 + 10r = -15r + 27 + 12r$

f) $23 - 18f - 35f = 9f + 13f - 17 - 4f$

g) $16a + 47 - 15a = 56 - 7a + 9a$

h) $\dfrac{4(x - 2)}{3} - \dfrac{x - 8}{6} = \dfrac{2(2x + 5)}{3} - \dfrac{5(x - 1)}{3}$

i) $3(z - 5) - 2(4z + 16) = 5(z + 9) + 6(4 - z) - 16$

j) $7x - 10 = 12x - 25 - 4x$

k) $\dfrac{2}{3}v - \dfrac{7}{3} + \dfrac{5}{3}v = 3v - 4$

l) $6t + 12 = 4t - t$

m) $7(y - 5) - (y + 6) - 18 = 2(4y - 8) - 5$

n) $5(3q - 8) - 3(2q + 9) + 63 = 9 - (2q - 1)$

ñ) $\dfrac{2t + 8}{2} - 2(3t - 5) = \dfrac{4t + 3}{3} - 2t$

o) $2.3r + 0.6r - 6.4 = 3.2r - 0.8$

p) $5(0.1q - 0.6) - 7.3q = q + 2.8$

q) $0.3v - 7.8 - 5v + 0.9 = -2.4(v - 2)$

r) $\dfrac{0.7(e - 0.2)}{0.3} - \dfrac{0.8(3.1e - 2.1)}{0.3} = \dfrac{4.2(0.6 - 3e)}{0.3}$

s) $5.4(w - 2) + 3.4(0.3w + 1) = 0.06(5w - 6)$

t) $-0.5t = 3.5 - 0.1t$

u) $5d - 0.08d = 3d + 0.3d + 12.5$

v) $\dfrac{2.8(5f + 0.3)}{0.5} - \dfrac{(3.1f - 2.6)}{0.2} = f$

w) $\dfrac{8}{t} - \dfrac{15}{t} + 16 = \dfrac{1}{t} - 9$

x) $16 - \dfrac{9}{y} = \dfrac{12}{y} + 8 - \dfrac{5}{y}$

y) $\dfrac{7}{3v} - \dfrac{4}{v} + 12 = \dfrac{9}{v} - 8$

z) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{x} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{x}$

4. ECUACIONES DE PRIMER GRADO Y FUNCIONES LINEALES

En la cuarta unidad de este curso se estudiaron las funciones lineales. Ahora las utilizaremos para interpretar gráficamente las soluciones de las ecuaciones de primer grado. Veamos un ejemplo.

Consideremos la ecuación de primer grado

$$9 = 3x - 6.$$

A esta ecuación podemos asociarle la función lineal determinada por

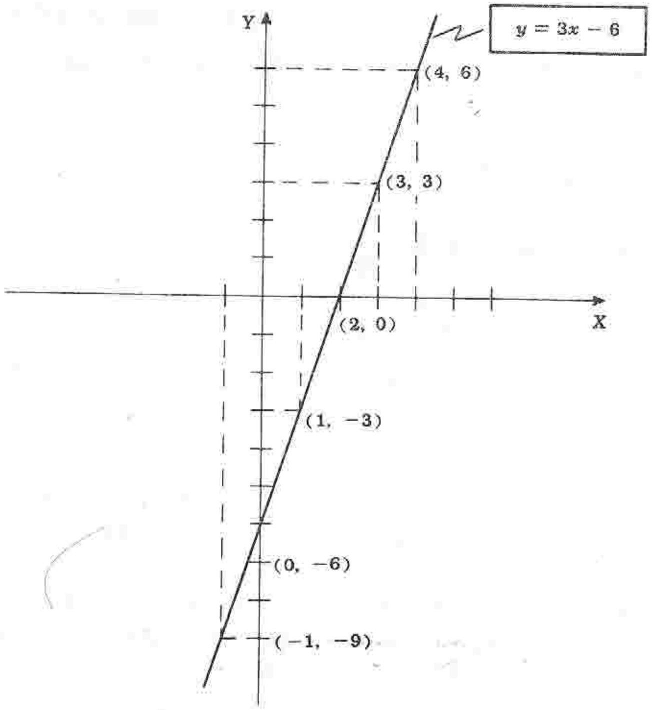
$$y = 3x - 6.$$

Para trazar la gráfica de esta función lineal elaboramos una tabla. Por ejemplo,

x	-1	0	1	2	3	4
$y = 3x - 6$	-9	-6	-3	0	3	6

Después marcamos en un sistema de coordenadas los puntos obtenidos, es decir, los puntos

$$(-1, -9), (0, -6), (1, -3), (2, 0), (3, 3), (4, 6).$$



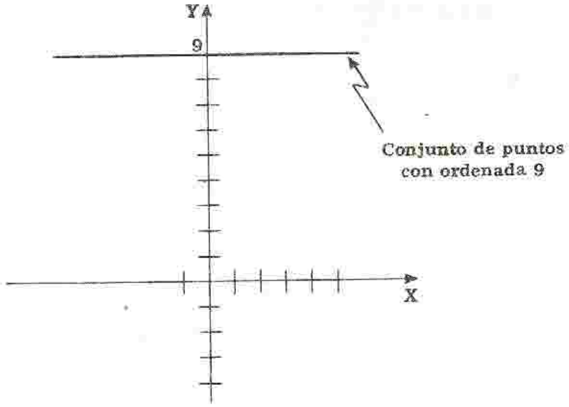
Como sabemos ya, la gráfica de cualquier función lineal es una recta. En nuestro ejemplo, es la recta que pasa por los puntos que hemos marcado.

La gráfica nos ayuda a contestar preguntas como las siguientes:

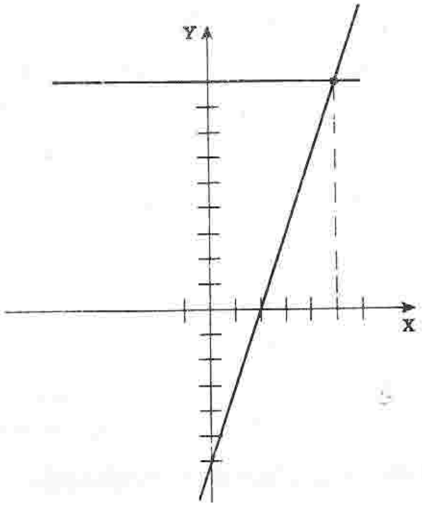
¿Para qué valor de x la función $y = 3x - 6$ vale 9? O lo que es lo mismo,

¿Cuál es la solución de la ecuación $9 = 3x - 6$? Estas dos preguntas equivalen a la siguiente:

¿Qué punto de la gráfica tiene ordenada 9? Para contestar esta última pregunta, y por lo tanto las anteriores, basta observar que los puntos que tienen ordenada 9, es decir, los puntos de la forma $(x, 9)$ forman una recta paralela al eje de las abscisas y que pasa por el punto 9 del eje de las ordenadas:



Así pues, si buscamos qué punto de la gráfica tiene ordenada 9, éste lo encontraremos al intersecar la gráfica de la función con la recta anterior:

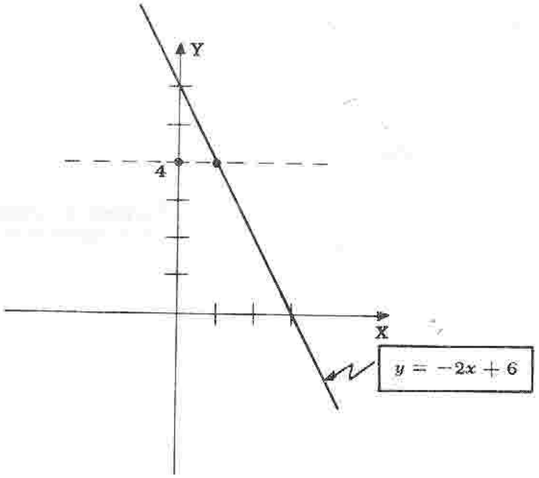


Vemos en la gráfica que el punto buscado es (5, 9).

Por lo tanto, la solución de la ecuación $9 = 3x - 6$ es $x = 5$. Dicho de otra manera para $x = 5$, la función $y = 3x - 6$ vale 9.

Veamos otro ejemplo que afiance estas ideas.

Ejemplo. En la siguiente figura se ilustra la gráfica de la función lineal $y = -2x + 6$.



a) ¿Qué punto de la gráfica tiene ordenada 4?

a′) ¿Para qué valor de x la función $y = -2x + 6$ vale -2?

a″) ¿Cuál es la solución de la ecuación $4 = -2x + 6$?

Para contestar estas preguntas trazamos sobre la figura la recta paralela al eje de las abscisas y que pasa por el punto 4 del eje de las ordenadas.

Veamos en la gráfica que este punto es (1, 4). Por lo tanto podemos contestar a las tres preguntas anteriores:

a) El punto de la gráfica que tiene ordenada 4 es (1, 4).

a′) ¿Para qué valor de x la función vale 4?

a″) 1 es solución de la ecuación $4 = -2x + 6$.

Ejercicio 12. Trazando las rectas convenientes en el dibujo del ejemplo anterior conteste las preguntas siguientes.

a) ¿Qué punto de la gráfica tiene ordenada -2?

a′) ¿Para qué valor de x la función $y = 2x + 6$ vale -2?

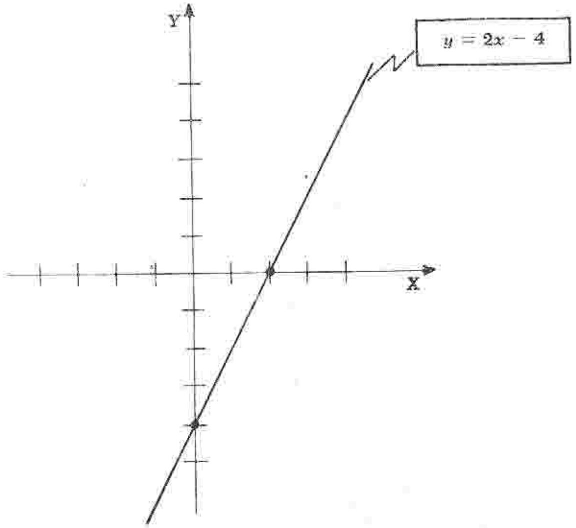
a″) ¿Cuál es la solución de la ecuación $-2 = -2x + 6$?

b′) ¿Para qué valor de x la función vale 8?

c″) ¿Cuál es la solución de la ecuación $0 = -2x + 6$?

d″) ¿Cuál es la solución de la ecuación $10 = -2x + 6$?

Ejercicio 13. En la siguiente figura se ilustra la gráfica de la ecuación $y = 2x - 4$. Utilizándola conteste las siguientes preguntas.



a) ¿Qué punto de la gráfica tiene ordenada 6?

a′) ¿Para qué valor de x la función $y = 2x - 4$ vale 6?

a″) ¿Cuál es la solución de la ecuación $6 = 2x - 4$?

b) ¿Qué punto de la gráfica tiene ordenada 2?

b″) ¿Cuál es la solución de la ecuación $2 = 2x - 4$?

c′) ¿Para qué valor de x la función $y = 2x - 4$ vale 0?

c″) ¿Cuál es la solución de la ecuación $2x - 4 = 0$?

d″) ¿Cuál es la solución de la ecuación $2x - 4 = 4$?

e″) ¿Cuál es la solución de la ecuación $2x - 4 = -2$?

f″) ¿Cuál es la solución de la ecuación $2x - 4 = -4$?

En los ejemplos y ejercicios anteriores hemos observado que

> *La solución de la ecuación*
>
> $$ax + b = c$$
>
> *es la abscisa del punto de intersección de la gráfica de la función*
>
> $$y = ax + b$$
>
> *con la recta paralela al eje de las abscisas y que pasa por el punto c del eje de las ordenadas.*

En particular,

> *La solución de la ecuación*
>
> $$ax + b = 0$$
>
> *es la abscisa del punto de intersección de la gráfica de la función*
>
> $$y = ax + b$$
>
> *con el eje de las abscisas.*

Ejercicio 14. En un papel cuadriculado dibuje la gráfica de la función dada por

$$y = 4x - 2$$

Utilizándola, encuentre la solución de las ecuaciones siguientes:

a) $4x - 2 = 2$
b) $4x - 2 = -2$
c) $4x - 2 = 0$
d) $4x - 2 = -6$
e) $4x - 2 = 5$
f) $4x - 2 = -4$

Ejercicio 15. Con el método gráfico que hemos estudiado encuentre la solución de las ecuaciones siguientes.

a) $-4x - 8 = -12$
b) $-4x - 8 = 0$
c) $-4x - 8 = 4$
d) $-4x - 8 = -4$
e) $-4x - 8 = -10$
f) $-4x - 8 = 8$

5. RESOLUCION DE PROBLEMAS

Resolveremos ahora algunos problemas cuyo planteamiento da origen a ecuaciones de primer grado en una incógnita.

Ejemplo. Encontrar dos números enteros consecutivos cuya suma sea 53.

Si x denota a un número entero, su consecutivo es $x + 1$. Las condiciones del problema indican que la suma de x con $x + 1$ es 53. Es decir, tenemos que

$$x + (x + 1) = 53.$$

Simplificando, obtenemos

$$2x + 1 = 53.$$

Al resolver esta ecuación, como hemos aprendido a hacerlo, obtenemos $x = 26$. Por lo tanto $x + 1 = 27$ y la respuesta al problema es:

Los dos números consecutivos cuya suma es 53 son 26 y 27.

Ejemplo. En una dieta el 16% de las calorías las proporcionan los **prótidos**, el 34% de las calorías las proporcionan los **lípidos** y los **glúcidos** proporcionan 1 350 calorías (las calorías de una dieta están dadas por glúcidos, prótidos y lípidos). ¿Cuántas calorías tiene esa dieta?

Si representamos con c a las calorías de la dieta, según los datos del problema tenemos que los prótidos proporcionan $.16c$, los lípidos $.34c$ y los glúcidos 1 350 calorías. Podemos establecer la ecuación

$$.16c + .34c + 1\,350 = c.$$

La solución de esta ecuación es la solución del problema. En este caso resulta $c = 2\,700$. (Resuelva la ecuación.)

Ejemplo. Sabemos que la distancia d de un cuerpo en movimiento uniforme es igual al producto de la velocidad v por el tiempo t. Es decir

$$d = vt.$$

Si un avión necesitó 3 horas y media para recorrer 3 250 km, ¿cuál fue su velocidad?

Tenemos que

$$3\,250 = v \times 3.5,$$

es decir,

$$v = \frac{3\,250}{3.5} = 900 \text{ km/h}$$

Ejemplo. La distancia aproximada del Sol a la Tierra es de 150 millones de kilómetros. ¿Qué tiempo tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra? (La velocidad de la luz es de 300 000 km/seg).

Sea t el tiempo que tarda la luz en llegar del Sol a la Tierra. Sabemos que $d = vt$, en donde $d = 150\,000\,000$ y $v = 300\,000$. Entonces

$$150\,000\,000 = 300\,000t.$$

Por lo tanto $t = 500$ segundos, es decir, 8 minutos y 20 segundos.

PROBLEMAS

1. La suma de dos números enteros consecutivos es 327. ¿Cuáles son esos números?

2. La suma de dos números enteros consecutivos es -47. ¿Cuáles son esos números?

3. La suma de dos números enteros pares es 654. ¿Cuáles son esos números?

4. La suma de dos números enteros pares es -188. ¿Cuáles son esos números?

5. Halle dos números pares consecutivos tales que el doble del menor menos el quíntuplo del mayor sea -148.

6. Halle cuatro enteros consecutivos tales que su suma sea -58.

7. Halle dos enteros consecutivos tales que el triple del mayor, menos el doble del menor, sea 36.

8. Si a cierto número se le suma su doble y luego se resta 14.8, el resultado es -32.5. ¿Cuál es ese número?

9. Si al doble de un número se le resta -16.7 el resultado es 7.1. ¿Cuál es ese número? (Solución: -4.8)

10. Un individuo en reposo necesita 23 calorías por kilogramo de peso al día y para hacer su trabajo necesita 12 calorías adicionales por kilogramo de peso al día. ¿Cuántos kilogramos pesa dicho individuo si necesita por estos dos conceptos 2 380 calorías al día?

11. En una dieta, la mitad de las calorías están dadas por los glúcidos, y los prótidos proporcionan 320 calorías. Si entre los glúcidos y los prótidos proporcionan 1 520 calorías, ¿de cuántas calorías es la dieta?

12. Si en una dieta el 55% de las calorías lo proporcionan los glúcidos, el 15% de las calorías los prótidos, y los lípidos proporcionan 900 calorías, ¿cuántas calorías contiene la dieta?

13. Una ración de 100 gramos de carne contiene 4 gramos más de proteína que el doble de la que contiene un huevo; si 100 gramos de carne y un huevo proporcionan 25 gramos de proteína, ¿cuántos gramos de proteína contienen 100 gramos de carne y cuántos gramos de proteína contiene un huevo?

14. En un grupo de una escuela secundaria el 60% son hombres. Si hay 18 mujeres, ¿cuántos alumnos hay en el grupo?

15. La República de Nicaragua tiene 990 kilómetros de costas en el océano Atlántico y en el océano Pacífico. Si la costa del Atlántico es 150 km mayor que la costa del Pacífico, ¿cuántos kilómetros mide cada una de las costas?

16. El aire es una mezcla de gases en la cual la quinta parte es oxígeno. ¿En cuántos litros de aire habrá 480 litros de gases que no son oxígeno?

17. En 1967 México ocupó el primer lugar en la producción mundial de plata. Si en ese año la producción mundial fue de 7 200 toneladas, ¿cuál fue la producción de México si el resto de los países produjeron 955 toneladas más que el cuádruple de lo que produjo México?

18. En 1968 el número de habitantes de Asia era 470 millones mayor que el triple del número de habitantes de América; si la población de los dos continentes era de 2 386 millones de personas, ¿cuál era la población de cada uno de estos continentes en ese año?

19. La población de América representa el 14% de la población mundial. Si en los otros continentes hay 3 004 millones de habitantes, ¿cuál es la población de la Tierra?

20. El río Amazonas tiene una longitud 900 km mayor que el doble de la longitud del río Bravo; si entre los dos ríos tienen una longitud de 8 400 km, ¿cuál es la longitud de cada río?

21. La República Mexicana tiene 9 219 km de costas, tanto en el Golfo de México y el Mar de las Antillas como en el Océano Pacífico. Si la costa del Pacífico es 1 386 km mayor que el doble de la costa del Golfo y las Antillas, ¿qué extensión tiene cada una de las costas?

22. Al producirse una explosión, entre el momento en que se observa el fogonazo y el momento en que se escucha la explosión transcurren 4 segundos. ¿Cuál es la distancia a la que sucedió la explosión si sabemos que el sonido recorre $340 \frac{m}{seg}$?

23. El triptófano y la metionina son dos aminoácidos de gran importancia en la nutrición humana. Un adulto necesita 2.7 gramos de estos dos aminoácidos. ¿Cuál es el requerimiento de cada uno de estos aminoácidos si el requerimiento de metionina es 200 miligramos mayor que el cuádruplo del requerimiento de triptófano?

24. Los salicilatos de sodio (aspirina) son de gran utilidad en el tratamiento antiinflamatorio de algunas enfermedades. Si la dosis recomendable en cierto tratamiento es de 5 centigramos por kilogramo de peso del enfermo, ¿cuántos kilogramos pesa un individuo al que se le recetan 3 gramos de aspirina?

25. En una escuela secundaria mixta, el 42% del alumnado es de mujeres. Si hay 464 varones, ¿cuántos alumnos tiene la escuela?

El concepto de densidad, que es la razón de la masa al volumen, es de gran utilidad en la resolución de algunos problemas. Esta razón puede expresarse así:

$$D = \frac{m}{v}$$

(D es la densidad, m la masa y v el volumen).

26. La densidad del oro es de $19.3 \frac{g}{cm^3}$. ¿Cuál es el volumen de una estatuilla de dicho metal que tiene una masa de 825 gramos?

27. La solución que se emplea en los acumuladores es una mezcla de ácido sulfúrico y agua destilada con una densidad de 1.240. ¿Cuál es la masa de 1850 cm^3 de dicha solución?

28. Si 8 cm^3 de mercurio tienen una masa de 108.8 gramos, ¿cuál es la densidad del mercurio?

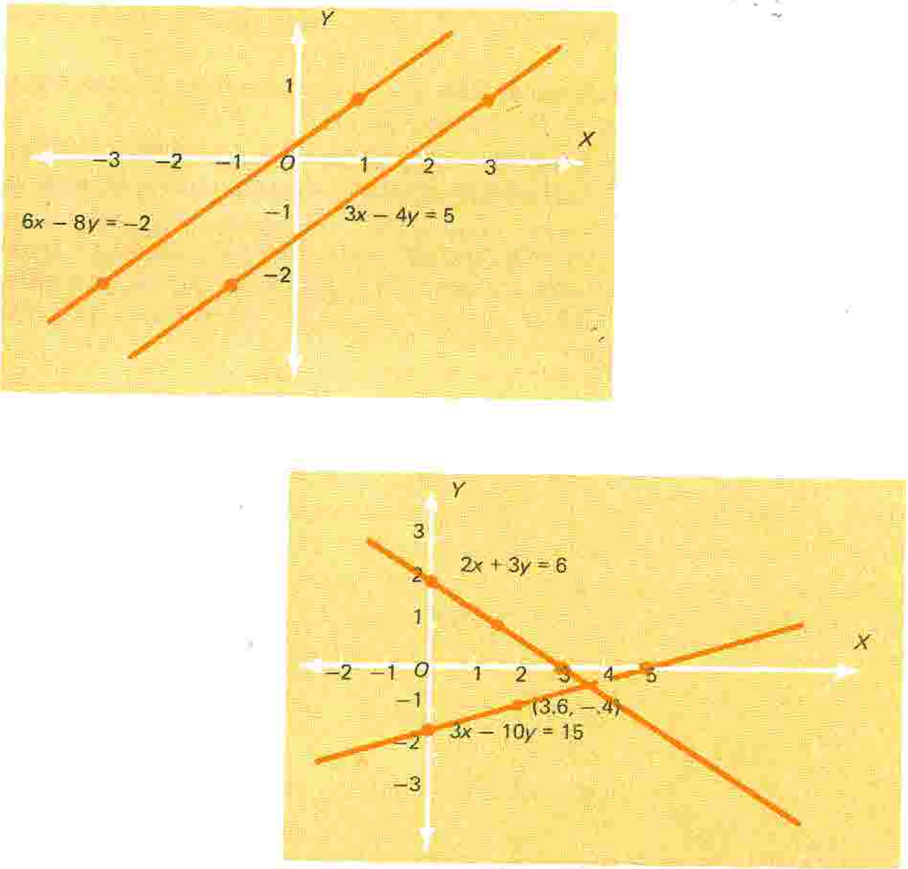
En las aleaciones para la fabricación de joyas o monedas se usan mezclas de algún metal fino, como oro o plata, y un metal "pobre", generalmente cobre. Por un acuerdo internacional se llama ley a la razón que existe entre el peso del metal fino y el peso total de la aleación. Esta razón se expresa así:

$$L = \frac{F}{T}.$$

(L es la ley, F el peso del metal fino y T el peso total de la aleación). Se acostumbra expresar la ley en milésimos.

29. Un joyero tiene un lingote de oro y cobre que pesa 1.280 kilogramos, con ley 0.800. ¿Cuántos gramos de oro puro contiene el lingote?

30. Se desean fabricar monedas de plata de ley 0.720. Si se tiene un lingote de ley 0.600, con un peso de 2.100 kilogramos, ¿cuántos gramos de plata pura deben agregársele para poder hacer las monedas con la ley deseada?



Muchos problemas conducen al planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales. Las gráficas de estos sistemas juegan un papel muy importante en matemáticas.

SEXTA UNIDAD

SISTEMAS DE ECUACIONES

OBJETIVOS PARTICULARES

Al concluir el desarrollo de la presente unidad, el alumno:

I. Establecerá el concepto de sistema de ecuaciones con dos variables.

II. Resolverá sistemas de ecuaciones lineales con dos variables utilizando diferentes procedimientos.

1. PROBLEMAS LINEALES

La mayor parte de las personas está acostumbrada a que los problemas que se plantean tengan solamente una solución. Sin embargo, hay muchos problemas que tienen más de una solución. Por ejemplo,

"encuentre dos números cuya suma sea 9"
"encuentre dos números tales que el cuadrado del primero sea el segundo",

son problemas que tienen muchas soluciones:

En el primero vemos que

$1 + 8 = 9$	$12 + (-3) = 9$
$9 + 0 = 9$	$-1 + 10 = 9$
$4.5 + 4.5 = 9$	etc.

En el segundo,

$3^2 = 9$
$5^2 = 25$
$(-3)^2 = 9$
$0^2 = 0$
$10^2 = 100$
etc.

Ejercicio 1.

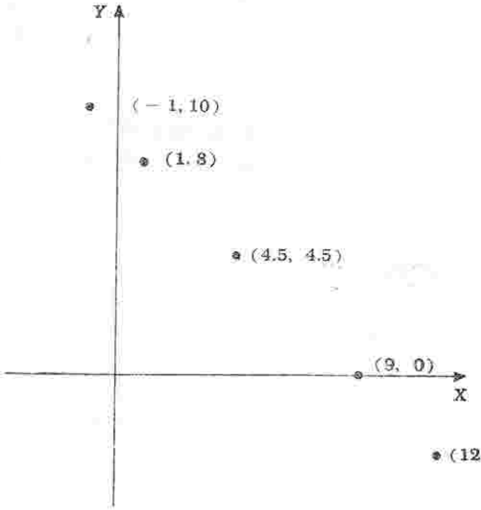
a) Plantee varios problemas que tengan más de una solución.

b) ¿Cuántas soluciones tiene una ecuación de primer grado en una incógnita?

Resolver un problema que tiene muchas soluciones significa *describir el conjunto de* todas *las soluciones* posibles. Para aclarar cómo se puede describir, en algunos casos, el conjunto de todas las soluciones regresemos al primer problema de "encontrar dos números tales que el primero más el segundo sea 9". Observemos que las soluciones son parejas de números:

1, 8
9, 0
4.5, 4.5
12, −3
−1, 10
etc.

Recordemos que los puntos del plano cartesiano tienen dos coordenadas (son parejas de números). Se ocurre entonces marcar en el plano cartesiano los puntos cuyas coordenadas son las parejas que hemos obtenido como soluciones:



Ejercicio 2.

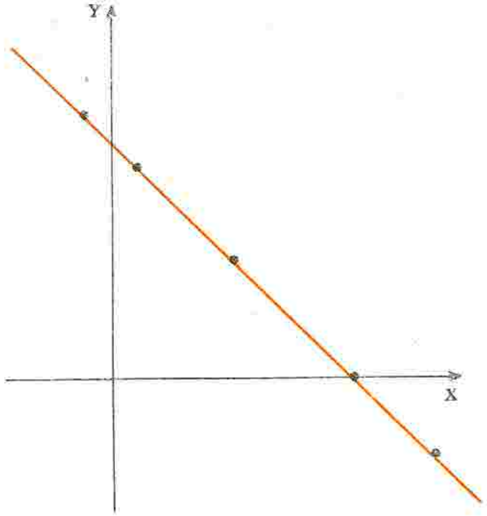
a) Compruebe que las siguientes parejas de números son soluciones del problema.

(2, 7)
(−1, 10)
(0, 9)
(6, 3)
(3, 6)
(11, −2)
(5, 4)
(7, 2)

b) Marque en la gráfica anterior las soluciones mencionadas en el inciso a).

Si observamos los puntos marcados apreciamos que todos están en una línea recta. Se puede verificar que cualquier otra solución del problema está también en esa recta. Inversamente, cualquier punto de la recta es solución del problema.

Así pues, la descripción del conjunto de soluciones en este caso es la línea recta que hemos mencionado.



Ejercicio 3. Encuentre puntos en la recta anterior (distintos de los que se han marcado) y verifique que la abscisa más la ordenada es igual a 9.

En el segundo problema de la introducción, "encontrar dos números tales que el cuadrado del primero sea el segundo", las soluciones son parejas de números. Sin embargo, al marcarlas en el plano observamos que los puntos obtenidos no están en una recta.

Ejercicio 4.

a) Compruebe que en las siguientes parejas de números, el cuadrado del primero es igual al segundo.

$(2, 4)$ $(3, 9)$ $(-2, 4)$ $(-3, 9)$

$(-1, 1)$ $(0, 0)$ $(1, 1)$

b) En el plano cartesiano dibuje los puntos que corresponden a estas soluciones y observe que no están en una recta. (Estos puntos están en una curva que se llama *parábola.*)

Las consideraciones anteriores nos muestran una gran diferencia entre el primero y el segundo problema. En el primero, todas las soluciones están en una recta; no así en el segundo.

Aquellos problemas que, como el primero, tienen todas sus soluciones en una línea recta se acostumbran llamar, por esta razón, **problemas lineales.**

A continuación se da una lista de problemas que tienen muchas soluciones. Algunos son lineales y otros no.

Encontrar dos números tales que

1. tres veces el primero más el segundo es igual a cinco.
2. el cuadrado del primero es igual a dos veces el segundo.
3. el primero entre el segundo es dos.
4. el primero por el segundo es treinta.
5. el primero menos el segundo es ocho.
6. cuatro veces el primero más dos veces el segundo es igual a veinte.
7. cinco veces el primero menos tres veces el segundo es igual a quince.

Los problemas 1, 3, 5, 6 y 7 son lineales. Los demás no.

Ejercicio 5. Tomando en cuenta las siguientes relaciones encuentre dos soluciones de cada uno de los problemas anteriores.

$3 \times 2 + 0 = 5$

$\frac{6}{3} = 2$

$9 - 1 = 8$

$5 \times 6 - 3 \times 5 = 15$

$6^2 = 2 \times 18$

$4^2 = 2 \times 8$

$6 \times 5 = 30$

$4 \times 2 + 2 \times 6 = 20$

$3 \times 4 + (-7) = 5$

$\frac{8}{4} = 2$

$3 \times 10 = 30$

$4 \times 3 + 2 \times 4 = 20$

$12 - 4 = 8$

$5 \times 12 - 3 \times 15 = 15$

(Por ejemplo, $3 \times 2 + 0 = 5$ indica que $(2, 0)$ es solución del problema 1 pues tres veces el número 2 más el número cero es igual a cinco.)

Ejercicio 6.

a) Verifique que $(6, 5)$, $(10, 3)$ y $(5, 6)$ son soluciones del problema 4.

b) Marque estos puntos en un sistema de coordenadas. Compruebe que no están en una recta y, por consiguiente, que el problema 4 no es lineal. (Las soluciones de este problema están en una curva que se llama *hipérbola.*)

2. ECUACIONES LINEALES Y SUS GRAFICAS

El primer problema mencionado en la sección anterior, "encuentre dos números tales que la suma del primero y el segundo sea igual a 9", puede expresarse mediante la ecuación

$$x + y = 9,$$

en donde x representa el primero de los números y y el segundo.

Los problemas 1, 3, 5, 6 y 7 de la lista del final de la sección anterior, que son lineales, pueden expresarse mediante las ecuaciones

1. $3x + y = 5$
3. $x = 2y$
5. $x - y = 8$
6. $4x + 2y = 20$
7. $5x - 3y = 15$

Ecuaciones como las anteriores reciben el nombre de **ecuaciones de primer grado en dos incógnitas**, o bien, **ecuaciones lineales.**

En general, una ecuación de primer grado en dos incógnitas es una ecuación de la forma

$$ax + by = c$$

en donde a, b y c son ciertos números (a o b distintos de cero).

En los siguientes ejercicios observaremos que las soluciones de ecuaciones lineales están en una recta.

Ejercicio 7.

a) Compruebe que las parejas (1, 2), (−1, 8), (2, −1) son soluciones de la ecuación

$$3x + y = 5$$

b) Marque estas soluciones en el plano cartesiano y observe que están en una recta.

c) Trace la recta que pasa por estos puntos. Marque después varios puntos sobre la recta, distintos de los anteriores y finalmente compruebe que sus coordenadas son solución de la ecuación.

Ejercicio 8. Proceda como en el ejercicio anterior con los datos (4, 0), (2, 5), (0, −10) y la ecuación $5x + 2y = 20$.

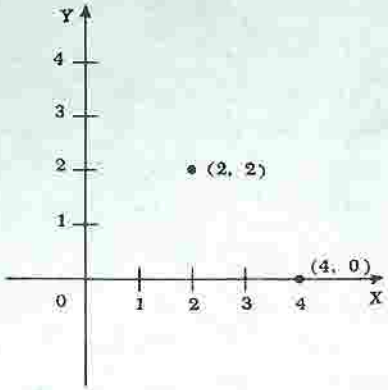
Lo que hemos observado en los ejercicios anteriores es cierto en general:

> *Los puntos que corresponden a soluciones de una ecuación de primer grado en dos incógnitas forman una recta.*

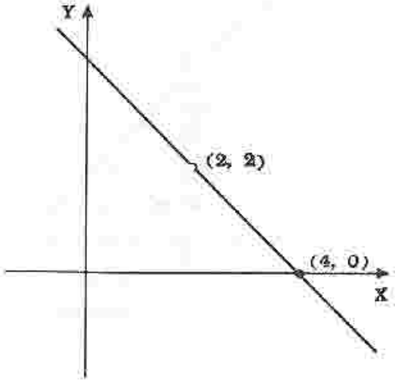
Sabemos que para determinar una recta son suficientes dos puntos. Por lo tanto, si conocemos *dos* soluciones de una ecuación lineal en dos incógnitas conoceremos ya *todas* las soluciones pues éstos son los puntos de la recta que pasa por esos dos puntos. Reafirmemos lo que acabamos de decir con ejemplos y ejercicios.

Ejemplo. Las parejas (2, 2) y (4, 0) son soluciones de la ecuación $x + y = 4$.

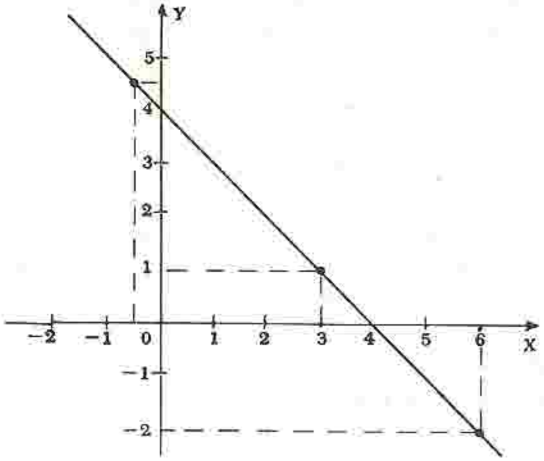
La gráfica de estas dos soluciones es la siguiente:



La gráfica de *todas* las soluciones de esa ecuación, $x + y = 4$, es la recta que pasa por esos dos puntos.

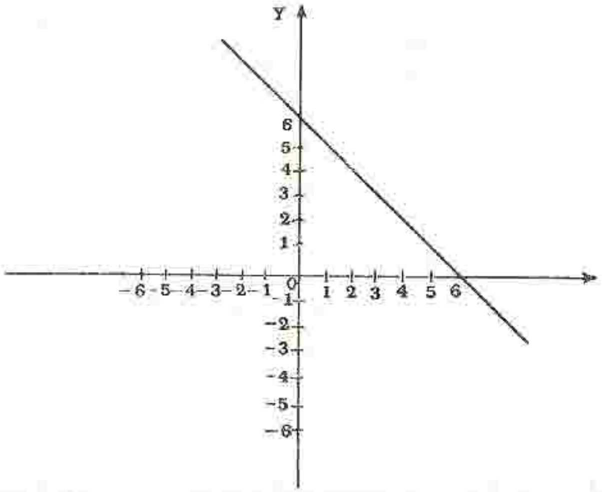


Así, cualquier punto de esta recta representa una solucion de la ecuación $x + y = 4$. Por ejemplo, las coordenadas del punto rojo, marcado en la gráfica, son $x = 3$, $y = 1$ y ésta es una solución de la ecuación. Efectivamente $3 + 1 = 4$.



Ejercicio 9. Determine las coordenadas de los otros puntos, marcados en la gráfica, y compruebe que son soluciones de la ecuación $x + y = 4$.

Ejercicio 10. Observe la siguiente gráfica de soluciones de la ecuación $x + y = 6$.



Considerando que las siguientes parejas son soluciones de la ecuación $x + y = 6$, utilice la gráfica anterior para encontrar el número que falta en cada pareja.

a) $x = 0,\ y = \boxed{6}$
b) $x = 4.5,\ y = \boxed{1.5}$
c) $x = -3,\ y = \boxed{9}$
d) $x = 7.5,\ y = \square$
e) $x = \square,\ y = 0$
f) $x = \square,\ y = 2$
g) $x = \square,\ y = 2.5$
h) $x = \square,\ y = -2$

En el ejercicio anterior habrá usted notado que, teniendo la gráfica de las soluciones de una ecuación, es fácil completar cualquier pareja de números de modo que ésta sea una de las soluciones. Todo se reduce a localizar la ordenada de un punto cuando conocemos su abscisa; o bien, localizar la abscisa del punto cuando conocemos su ordenada.

El trabajo que hemos realizado en ese ejercicio también puede efectuarse sin tener la gráfica de las soluciones. Por ejemplo, si nos piden completar la pareja

$$x = 4,\ y =$$

de manera que resulte una solución de la ecuación $x + y = 7$, podemos sustituir la x por el valor que nos han dado y así obtenemos una ecuación con una sola incógnita.

$$x + y = 7$$

$$4 + y = 7$$

Al resolver esta ecuación hallamos que

$$4 + y - 4 = 7 - 4$$

$$y = 3$$

El valor de y es 3 cuando el valor de x es 4. Esto es, la pareja (4, 3) es solución de la ecuación $x + y = 7$.

Así como hallamos el valor de y correspondiente a un valor dado de x, también podemos hallar el valor de x correspondiente a un valor dado de y. Por ejemplo, completemos la pareja

$$x = \square, \qquad y = 5$$

de modo que sea solución de la ecuación $x + y = 7$.

Sustituimos la y por su valor 5.

$$x + y = 7$$

$$x + 5 = 7$$

Resolvemos esta última ecuación y hallamos que $x = 2$. Esto es, el valor de x es 2 cuando $y = 5$.

Ejercicio 11. Complete las siguientes parejas de manera que cada una de ellas sea solución de la ecuación $x + y = 7$.

a) $x = 1,\ y = \square$
b) $x = 5,\ y = \square$
c) $x = .5,\ y = \square$
d) $x = \frac{3}{4},\ y = \square$
e) $x = -3,\ y = \square$
f) $x = -\frac{1}{2}\ y = \square$
g) $x = \square,\ y = 4$
h) $x = \square,\ y = 7$
i) $x = \square,\ y = -2$
j) $x = \square,\ y = \frac{2}{5}$

Ejercicio 12. Las parejas anotadas en la siguiente tabla son soluciones de la ecuación $x + y = 5$. Complete la tabla.

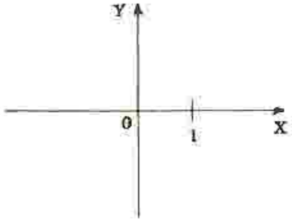
x	2	4	5						
y	3			5	−2	.6	$\frac{1}{3}$		

Ejercicio 13. Anote usted en la última columna de la tabla anterior cualquier pareja de números que sea solución de la misma ecuación $x + y = 5$. Fije primero un valor para x y encuentre después el correspondiente valor de y.

Ejercicio 14. En cada inciso complete la tabla y trace la gráfica de soluciones de la ecuación dada.

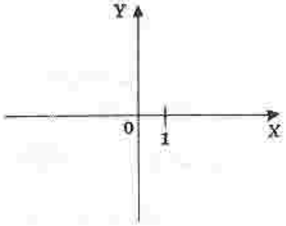
a) $x + y = 3$

x	y
0	
−1	
3	



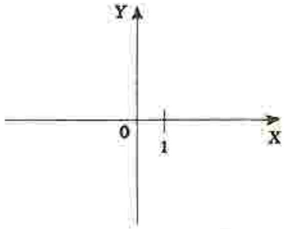
b) $x - y = 2$

x	y
	0
	−1
	2



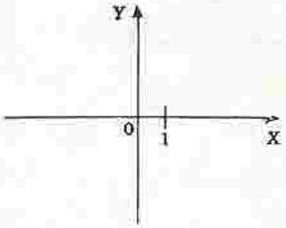
c) $x + y = -3$

x	y
	0
−2	
0	
	2



d) $x + y = -2$

x	y
0	
−2	
	4
	2



Ejercicio 15. Trace la gráfica de soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones lineales. (Encuentre primero dos soluciones.)

$$2x + y = 5;\ x - y = 0;\ x - 2y = 4.$$

Ejercicio 16. En un mismo sistema de coordenadas trace las gráficas de soluciones de las ecuaciones

$$x + y = 5 \qquad 3x + y = 11$$

¿Tienen algún punto de intersección las dos rectas trazadas? ¿Hay alguna solución de la primera ecuación que sea también solución de la segunda? En caso de ser así, ¿cuál es la solución común?

Ejercicio 17. En un mismo sistema de coordenadas trace las gráficas de soluciones de las ecuaciones $x + y = 4$, $x + y = 2$.

Observe que las dos rectas que usted trazó son paralelas; no tienen ningún punto común. ¿Hay alguna solución de la primera ecuación que sea también solución de la segunda?

3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

En las secciones anteriores hemos hablado de las soluciones de una ecuación lineal. Ahora trataremos las soluciones comunes a varias ecuaciones lineales.

Consideremos el siguiente problema. Hallar dos números tales que el primero más el segundo sea 9 y que, además, el primero menos el segundo sea 3.

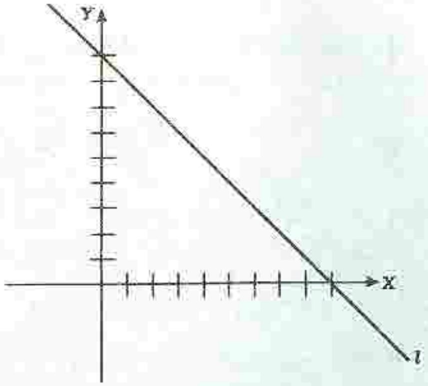
La primera condición del problema, que la suma sea 9, se puede expresar mediante la ecuación

$$x + y = 9$$

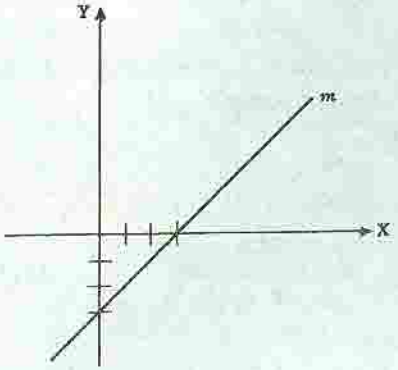
y la segunda, mediante la ecuación

$$x - y = 3.$$

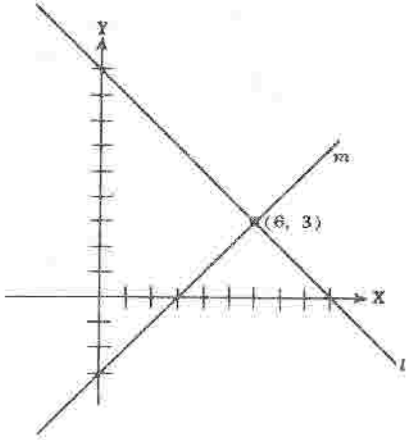
Las soluciones de la primera ecuación son los puntos de la recta *l*:



Las soluciones de la segunda ecuación son los puntos de la recta *m*:



Como los números que buscamos deben satisfacer las *dos* condiciones al mismo tiempo, la pareja formada con estos números debe ser solución tanto de una ecuación como de la otra. Por lo tanto, esta solución común es el punto de la intersección de las dos rectas:



Así pues, los números buscados son 6 y 3. En efecto, $6 + 3 = 9$ y $6 - 3 = 3$.

En casos como el anterior, en lugar de hablar de las soluciones comunes a dos ecuaciones se acostumbra hablar de las soluciones de un sistema de ecuaciones, lo cual se indica con una llave

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

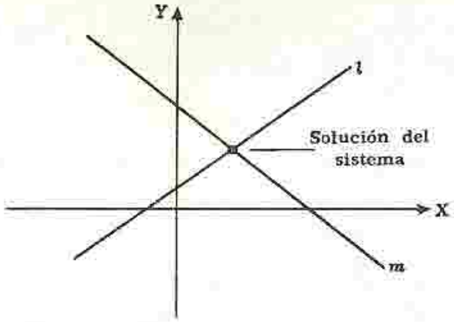
En general un **sistema de dos ecuaciones** de primer grado en dos incógnitas es de la forma

$$ax + by = k$$
$$cx + dy = l$$

y una **solución del sistema** es una solución *común a las dos ecuaciones*.

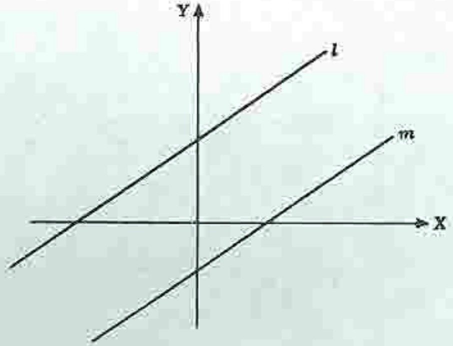
Tomando en cuenta que las soluciones de cada una de las ecuaciones de un sistema es una recta y que las soluciones del sistema son las soluciones comunes, vemos que se pueden presentar los tres casos siguientes:

Primero. *Las rectas se cortan en un punto.* En este caso: El sistema tiene solamente *una solución*



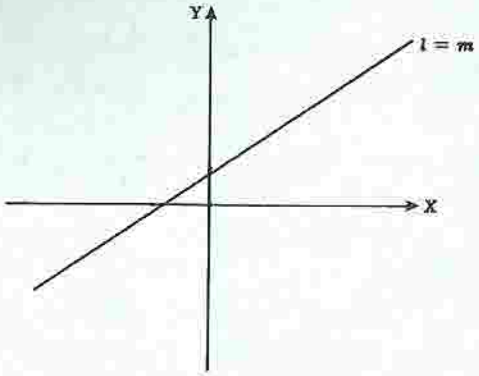
Segundo. *Las rectas son paralelas* (y distintas).

En este caso, como las rectas no se intersecan, no hay solución común. Es decir:



El sistema **no tiene solución.** (A veces se dice que el sistema es inconsistente o incompatible.)

Tercero. *Las dos ecuaciones tienen como conjunto de soluciones a la misma recta.*



En este caso todas las soluciones de una ecuación lo son de la otra. Por lo tanto, en este caso:

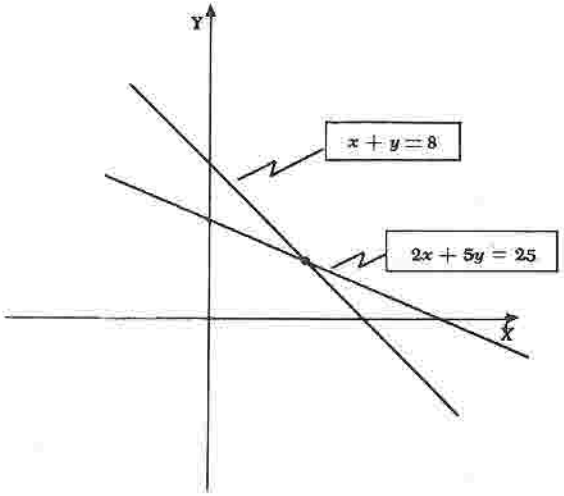
El sistema **tiene una infinidad de soluciones.**

A continuación resolveremos gráficamente varios sistemas de ecuaciones e ilustraremos los distintos casos que se pueden presentar.

Ejemplo 1. Para resolver el sistema

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 5y = 25 \end{cases}$$

trazamos las rectas formadas por las soluciones de cada una de las ecuaciones:

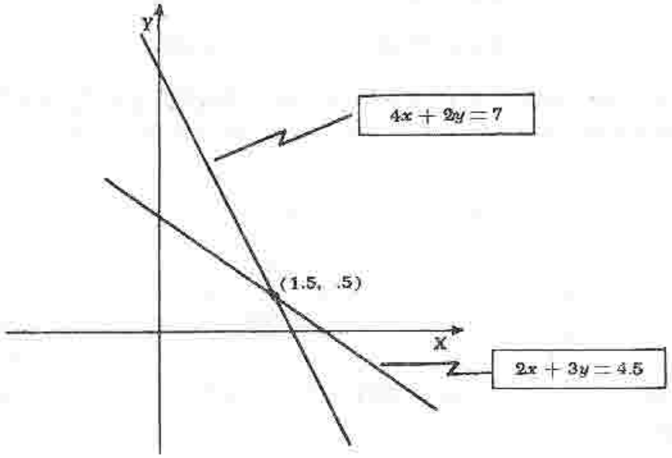


Estas dos rectas no son paralelas y se intersecan en el punto (5, 3). Por lo tanto, la solución del sistema es $x = 5$, $y = 3$.

Ejemplo 2. El sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4.5 \\ 4x + 2y = 7 \end{cases}$$

determinar las siguientes rectas:

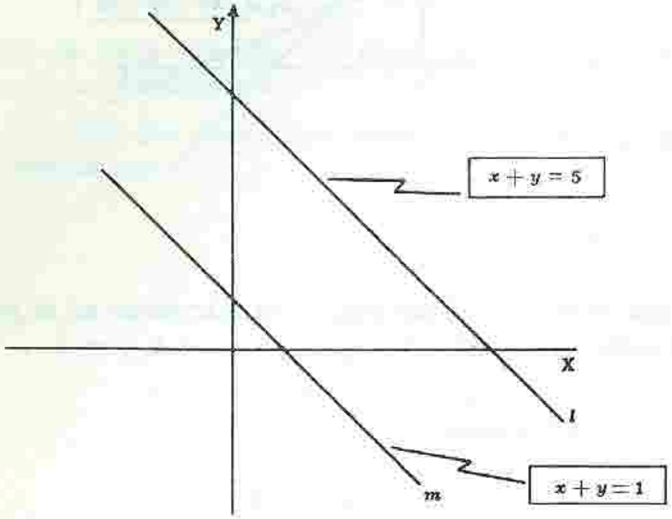


Hay una solución que es $x = 1.5$, $y = .5$.

Ejemplo 3. El sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

determine las siguientes rectas:

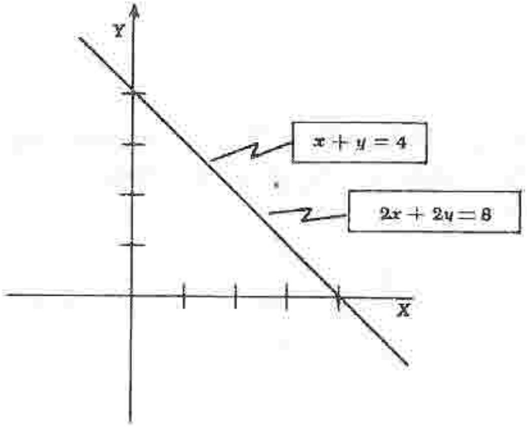


En este caso las rectas son paralelas y el sistema no tiene solución.

Ejemplo 4. El sistema

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

da lugar a una sola recta pues las dos ecuaciones determinan la misma recta:



En este caso, cualquier punto de la ruta marcada es solución del sistema. Por lo tanto, el sistema tiene una infinidad de soluciones.

Ejercicio 18. Resuelva gráficamente cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 6 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x - 2y = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y = 10 \\ 4x - y = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = -2 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$$

4. RESOLUCION ALGEBRAICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES

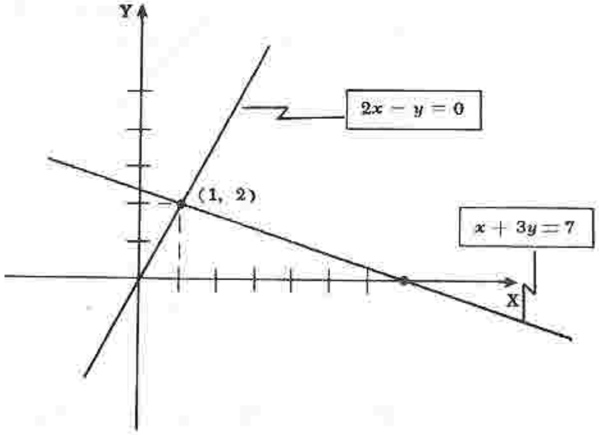
En la sección anterior aprendimos a resolver gráficamente sistemas de ecuaciones de primer grado en dos incógnitas. Sin embargo, como usted ya habrá observado, este procedimiento no es muy exacto debido a errores de dibujo y de medición. Ahora estudiaremos cómo resolver algebraicamente estos sistemas.

Para esto observaremos primero una propiedad importante.

Consideremos un sistema de ecuaciones lineales, por ejemplo,

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

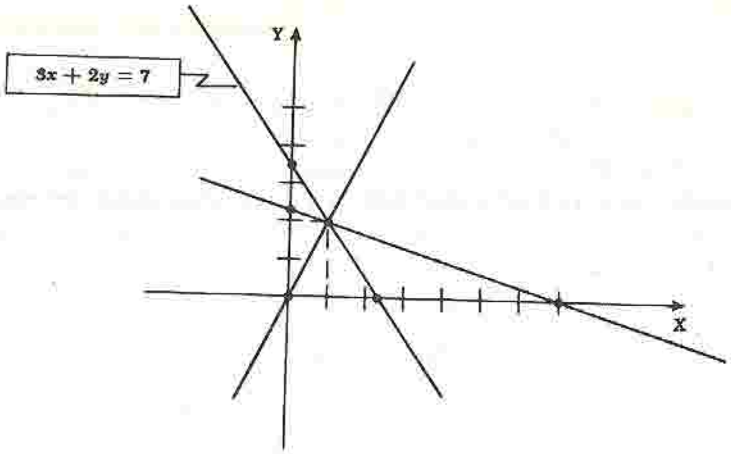
Las gráficas de las soluciones de las ecuaciones son las siguientes rectas que, como vemos, se cortan en el punto (1, 2), que es la solución del sistema.



Formemos ahora otra ecuación "sumando las dos ecuaciones miembro a miembro", es decir,

$$\begin{array}{rr} & 2x - y = 0 \\ + & x + 3y = 7 \\ \hline & 3x + 2y = 7 \end{array}$$

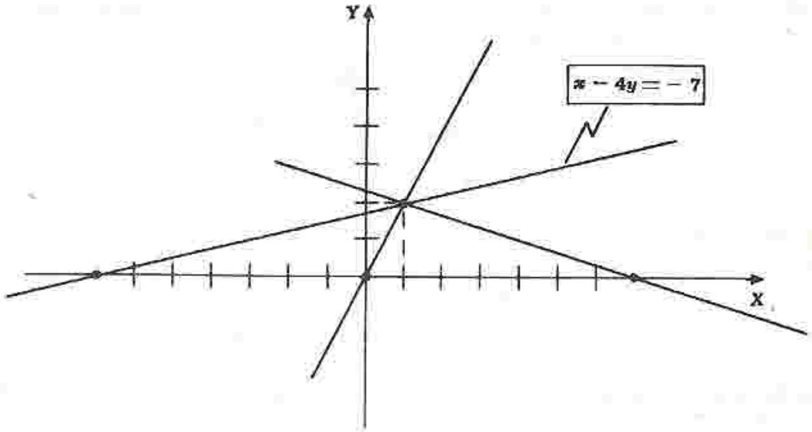
Al trazar la gráfica de esta nueva ecuación, observamos que la recta pasa también por el punto (1, 2):



Si en vez de "sumar", "restamos" las ecuaciones, encontramos otra ecuación

$$\begin{array}{rr} - & 2x - y = 0 \\ & x + 3y = 7 \\ \hline & x - 4y = -7 \end{array}$$

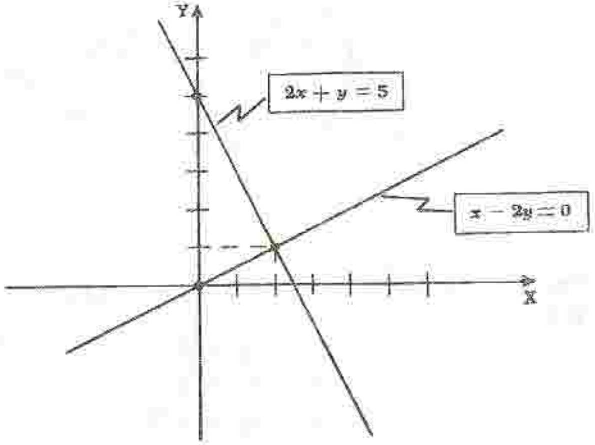
Al trazar la gráfica de esta ecuación observamos que esta recta también pasa por el mismo punto (1, 2):



Ejercicio 19. Proceda como en el ejemplo anterior con las ecuaciones del sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Es decir, calcule su "suma" y observe que la recta de soluciones de la ecuación observada pasa por el punto de intersección. Después "reste" las ecuaciones y observe lo mismo. Para facilidad, se dan a continuación las rectas correspondientes a las ecuaciones del sistema:



Las propiedades que se observaron en el ejemplo y en el ejercicio que anteceden no son casuales. Valen para cualquier sistema de ecuaciones que tenga una solución.

Lo anterior demuestra que *si el sistema*

$$\begin{cases} ax + by = k \\ cx + dy = l \end{cases}$$

tiene una solución entonces el sistema

$$\begin{cases} ax + by = k \\ (a + c)x + (b + d)y = k + l \end{cases}$$

tiene **la misma solución**. También, el sistema

$$\begin{cases} ax + by = k \\ (a - c)x + (b - d)y = k - l \end{cases}$$

tiene **la misma solución**.

Estos resultados los aplicaremos ahora para resolver sistemas de ecuaciones.

Ejemplo 1. Resolveremos el siguiente sistema

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Sabemos que si sumamos las ecuaciones

$$\begin{array}{r} x + y = 9 \\ + \; x - y = 3 \\ \hline 2x \qquad = 12 \end{array}$$

y formamos el sistema

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 2x \qquad = 12 \end{cases}$$

éste tiene la misma solución que el sistema original. Ahora bien, este nuevo sistema es muy fácil de resolver. En efecto, la segunda ecuación tiene solamente una incógnita. Al resolverla, obtenemos

$$x = \frac{12}{2} = 6$$

Para hallar ahora el valor de y sólo tenemos que sustituir $x = 6$ en la primera ecuación:

$$x + y = 9, \qquad 6 + y = 9, \qquad y = 9 - 6 = 3.$$

Encontramos así que la pareja $x = 6$, $y = 3$ es la solución del sistema.

Comprobación.

$$\begin{array}{lcl} x + y = 9 & \qquad & x - y = 3 \\ 6 + 3 = 9 & & 6 - 3 = 3 \end{array}$$

Ejemplo 2. Para resolver el sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 17 \\ x + y = 9 \end{cases}$$

conviene "restar las ecuaciones miembro a miembro".

$$\begin{array}{r} - \; 3x + y = 17 \\ x + y = 9 \\ \hline 2x \qquad = 8 \end{array}$$

porque de esta manera, según vemos, se obtiene una ecuación con una sola incógnita. Sabemos que el sistema

$$\begin{cases}3x + y = 17\\ 2x \qquad = 8\end{cases}$$

tiene la misma solución que el sistema dado. Resolvamos pues el segundo sistema:

$$2x = 8, \qquad x = \frac{8}{2} \qquad x = 4$$

Sustituimos $x = 4$ en la primera ecuación

$$3x + y = 17 \qquad 12 + y = 17, \qquad y = 5.$$

y de esta manera encontramos la solución $x = 4$, $y = 5$.

Comprobación.

$$\begin{cases}3x + y = 17\\ x + y = 9\end{cases} \qquad \begin{cases}3 \times 4 + 5 = 17\\ 4 + 5 = 9\end{cases}$$

Ejercicio 20. Tal como se hizo en los ejemplos anteriores resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases}4x + y = 11\\ 4x + 2y = 2\end{cases}$ b) $\begin{cases}3x + 5y = 2\\ x - 5y = 14\end{cases}$

c) $\begin{cases}5x + 4y = 33\\ 5x + y = 27\end{cases}$ d) $\begin{cases}3a + 5b = 21\\ 8a - 5b = 1\end{cases}$

Ejemplo 3. Resolveremos ahora el sistema

$$\begin{cases}2x + 5y = 25\\ x + y = 8\end{cases}$$

En este caso, si tomamos las ecuaciones tal como están y las "sumamos" o "restamos", no eliminamos ninguna incógnita. Así que primero vamos a multiplicar por un mismo número los dos miembros de una de ellas (con ello, no alteramos las soluciónes). Por ejemplo, podemos multiplicar por 2 los dos miembros de la ecuación $x + y = 8$ y obtenemos

$$\begin{cases}2x + 5y = 25\\ 2x + 2y = 16\end{cases}$$

y así podemos proceder a "restar miembro a miembro" o, como se dice simplemente, "restar las ecuaciones":

$$\begin{array}{r}2x + 5y = 25\\ -\;2x + 2y = 16\\ \hline 3y = 9\end{array}$$

Resolvemos esta última ecuación:

$$3y = 9, \qquad y = 3$$

y sustituimos el valor de y en cualquiera de las ecuaciones del sistema para hallar el valor de x; por ejemplo, en la segunda:

$$x + y = 8, \qquad x + 3 = 8, \qquad x = 5$$

Así encontramos la solución del sistema presentado originalmente; es la pareja $x = 5$, $y = 3$.

Comprobación.

$$\begin{cases}2x + 5y = 25\\ x + y = 8\end{cases} \qquad \begin{cases}2 \times 5 + 5 \times 3 = 25\\ 5 + 3 = 8\end{cases}$$

Ejercicio 21. Tal como se hizo en el ejemplo, resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones

a) $\begin{cases}3x + 2y = 23\\ x + y = 1\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x + y = 10\\ x + 3y = 15\end{cases}$

c) $\begin{cases}x + 3y = 3\\ 3x + 2y = 16\end{cases}$ d) $\begin{cases}6x + 2y = 28\\ 2x - y = 1\end{cases}$

Ejemplo 4. Resolvamos ahora el sistema

$$\begin{cases}2x + 3y = 14\\ 3x - 4y = 4\end{cases}$$

Con el fin de que los coeficientes de x sean iguales podemos multiplicar la primera ecuación por 3 y la segunda por 2:

$$\begin{array}{l}3)\\ 2)\end{array}\begin{cases}2x + 3y = 14\\ 3x - 4y = 4\end{cases} \qquad \begin{cases}6x + 9y = 42\\ 6x - 8y = 8\end{cases}$$

Restamos ahora las ecuaciones y resolvemos el sistema:

$$\begin{array}{r}6x + 9y = 42\\ 6x - 8y = 8\\ \hline y = 2\end{array} \qquad \begin{array}{l}2x + 3 \times 2 = 14\\ 2x + 6 = 14\\ 2x = 14 - 6\end{array} \qquad \begin{array}{l}2x = 8\\ x = 4\end{array}$$

La solución es $x = 4$, $y = 2$.

Ejercicio 22. Tal como se hizo en el ejemplo, resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - 3y = 23.5 \\ 5x + 5y = 42.5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 4y = 10 \\ 3x - 3y = 22.5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 7a - 5b = -7 \\ 2a + 3b = 13.5 \end{cases}$

El método que acabamos de usar para resolver sistemas de ecuaciones suele llamarse *"procedimiento por reducción"* pues con él se reduce el sistema a otro más sencillo y que tiene la misma solución.

Veremos ahora otro procedimiento que se acostumbra llamar *"procedimiento por sustitución"*.

Ejemplo 5.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

Expresamos x en términos de y en una de las ecuaciones por ejemplo en la segunda:

$$x = 3 + 2y.$$

Sustituimos esta expresión para x en la otra ecuación:

$$3(3 + 2y) + 2y = 1$$

y obtenemos una ecuación de primer grado en *una* incógnita, la cual ya sabemos resolver:

$9 + 6y + 2y = 1;$ $9 + 8y = 1;$ $8y = -8;$ $y = -1.$

Finalmente, en la expresión $x = 3 + 2y$ sustituimos y por su valor:

$$x = 3 + 2(-1) = 3 - 2 = 1.$$

Así pues, la solución es $x = 1, y = -1.$

Ejemplo 6.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ 3x - 4y = 4 \end{cases}$$

Expresamos una incógnita en términos de la otra utilizando una de las ecuaciones. Por ejemplo, escribimos

$3x = 4 + 4y,$ $x = \dfrac{4 + 4y}{3}.$

Sustituimos esta expresión en la otra ecuación:

$$2\left(\frac{4 + 4y}{3}\right) + 3y = 14\cdot$$

Obtenemos así una ecuación de primer grado en una incógnita, la cual ya sabemos resolver:

$\dfrac{8 + 8y}{3} + 3y = 14;$ $8 + 8y + 9y = 42;$ $8 + 17y = 42;$

$17y = 34;$ $y = 2.$

Luego encontramos x:

$$x = \frac{4 + 4 \times 2}{3} = \frac{12}{3} = 4:$$

O sea, la solución es $x = 4, y = 2.$

Ejercicio 23. Utilizando cualquiera de los procedimientos que hemos estudiado, "gráfico", "por reducción" o "por sustitución", resuelva los siguientes sistemas. (En algunos casos hay que "simplificar" primero las ecuaciones.)

a) $\begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 10x - 2y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 6x + 3y = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2u + 5v = 0 \\ u + 2v - 3 + u \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x = 3x + y \\ x + y = 2 + y \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x + 5y = 8 + 3x \\ 5x + 3y = 17 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2u + v = 2 + v \\ u - v = 2u - 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x + 5y = 5x - y - 20 \\ 2x + 2y = x \end{cases}$ h) $\begin{cases} x + y = 2 - 3x - y \\ 2x + 2y = 1 - 2x - y \end{cases}$

i) $\begin{cases} 3x = 5 - 2y \\ 3x + y = 9 - 3x - 2y \end{cases}$ j) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 4 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 0 \end{cases}$

5. PROBLEMAS

En esta sección resolveremos algunos problemas cuyo planteamiento da origen a sistemas de ecuaciones de primer grado en dos incógnitas.

Problema. Con 25 pesos se van a comprar timbres del impuesto sobre la renta, cuyos precios son de \$2.00 y \$5.00. Si se quiere comprar 8 estampillas en total, ¿cuántas de cada precio deben pedirse?

Resolución.

Número de estampillas de \$2.00	x
Número de estampillas de \$5.00	y
Total de estampillas	$x + y = 8$
Costo de las estampillas de \$2.00	$2x$
Costo de las estampillas de \$5.00	$5y$
Costo total	$2x + 5y = 25$

Tenemos entonces el sistema

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 5y = 25 \end{cases}$$

que podemos resolver fácilmente. Multiplicamos la primera ecuación por 5:

$$\begin{cases} 5x + 5y = 40 \\ 2x + 5y = 25 \end{cases}$$

Al restar obtenemos

$$3x = 15,$$

de donde $x = 5$. Como $x + y = 8$, $y = 3$.

Respuesta. Deben pedirse 5 estampillas de \$2.00 y 3 de \$5.00.

Problema. En una papelería se compran 2 plumas y 3 lápices con \$4.50. Se nos dice que con \$7.00 se pueden comprar 4 plumas y 2 lápices. ¿Cuál es el precio de cada artículo?

Resolución.

Precio de una pluma	x
Precio de un lápiz	y
Importe de 2 plumas	$2x$
Importe de 3 lápices	$3y$
Importe de la compra	$2x + 3y = 4.50$
Importe de 4 plumas	$4x$
Importe de 2 lápices	$2y$
Importe de la posible compra	$4x + 2y = 7$

La solución del problema será la solución de

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4.50 \\ 4x + 2y = 7 \end{cases}$$

Multiplicamos por 2 la primera ecuación. Obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 4x + 6y = 9 \\ 4x + 2y = 7 \end{cases}$$

Al restar obtenemos $4y = 2$, por lo que $y = 0.50$. Sustituyendo en la primera ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} 2x + 3(0.50) &= 4.50 \\ 2x + 1.50 &= 4.50 \\ 2x = 4.50 &= 1.50 \\ 2x = 3& \\ x = 1.50& \end{aligned}$$

Respuesta. El precio de una pluma es \$1.50 y el de un lápiz es \$0.50.

PROBLEMAS

Los siguientes problemas pueden plantearse mediante sistemas de dos ecuaciones en dos incógnitas.

1. La suma de dos números es 131 y su diferencia 55. ¿Cuáles son dichos números?

2. Dos hombres construyeron una barda con 860 ladrillos. Si el primero de ellos colocó 100 ladrillos más que el segundo, ¿cuántos ladrillos colocó cada uno?

3. Si al numerador de una fracción se le suma 1 y al denominador se le resta 2, la nueva fracción es igual a 1. Si al numerador de la fracción original se le suma 7 y al denominador se le resta 4, la nueva fracción es igual a 3. ¿Cuál es la fracción original?

4. Un tinaco contiene 120 litros más que otro y entre los dos contienen 430 litros. ¿Cuántos litros contiene cada uno?

5. Una persona cambia 1 000 pesos en billetes de 50 y 20 pesos. Si le dan 29 billetes en total, ¿cuántos billetes de cada denominación le dieron?

6. Se compraron timbres postales de \$.80 y de \$.40. En total son 40 timbres y por ellos se pagaron \$22.80. ¿Cuántos timbres de cada clase se compraron?

7. Una alberca de forma rectangular tiene un perímetro de 48 metros. Si el largo es el doble del ancho y la profundidad es de 2 metros, ¿cuántos metros cúbicos de agua le caben?

8. En una peluquería, el corte de pelo cuesta 6 pesos a los niños y 8 pesos a los adultos. Si se hacen el corte 28 personas en un día y se recaudan 200 pesos en total ¿cuántos niños se cortaron el pelo ese día?

9. Cuatro tortillas y dos bolillos proporcionan 434 calorías. Tres tortillas y un bolillo proporcionan 267 calorías. ¿Cuántas calorías proporciona una tortilla y cuántas un bolillo?

10. En una dieta normal la diferencia que hay entre las proteínas y las grasas es de 20 gramos. Si se duplicaran las proteínas, entonces se ingerirían 220 gramos de proteínas y grasas. ¿Cuántos gramos de proteína y cuántos de grasa hay en una dieta normal?

11. Tres adolescentes y cuatro adultos necesitan, entre todos, 535 gramos de proteínas al día. Dos adolescentes y cinco adultos necesitan 450 gramos de proteína al día. ¿Cuál es el requerimiento de proteínas de un adolescente y de un adulto al día?

12. Una persona es maestro de secundaria y maestro de primaria. En el primer empleo le descontaban 8% de su sueldo y en el segundo 6% y el total de descuentos era de \$250. Al aumentar los impuestos, en su sueldo de secundaria le descontaban el 17% y en el de primaria el 9%. Si el total de descuentos es actualmente de \$475, ¿cuál es su sueldo sin descuentos en cada empleo?

13. Un comerciante compra alcohol de dos clases. Con dos litros del primero y 3 del segundo obtiene una mezcla que cuesta \$9.50 el litro. Si con 3 litros del primero y 2 del segundo obtiene una mezcla que cuesta \$10.50 el litro, ¿cuánto cuesta el litro de cada una de las dos clases de alcohol?

14. Arquímedes de Siracusa, notable matemático griego de la antigüedad, descubrió que al sumergir en agua cuerpos de igual peso y diferentes sustancias, estos cuerpos perdían parte de su peso y ese peso que perdían era diferente para las distintas sustancias.

En cierta ocasión Herón de Siracusa mandó hacer una corona de oro y plata que pesaba 7 465 gramos. Una vez hecha, le encargó a Arquímedes que determinara la cantidad de oro que había en ella. Arquímedes la sumergió en agua y encontró que perdió 467 gramos de su peso. Si se sabe que el oro pierde 52 milésimos de su peso y la plata pierde 95 milésimos del suyo ¿cuántos gramos de plata y cuántos gramos de oro contenía esa corona?

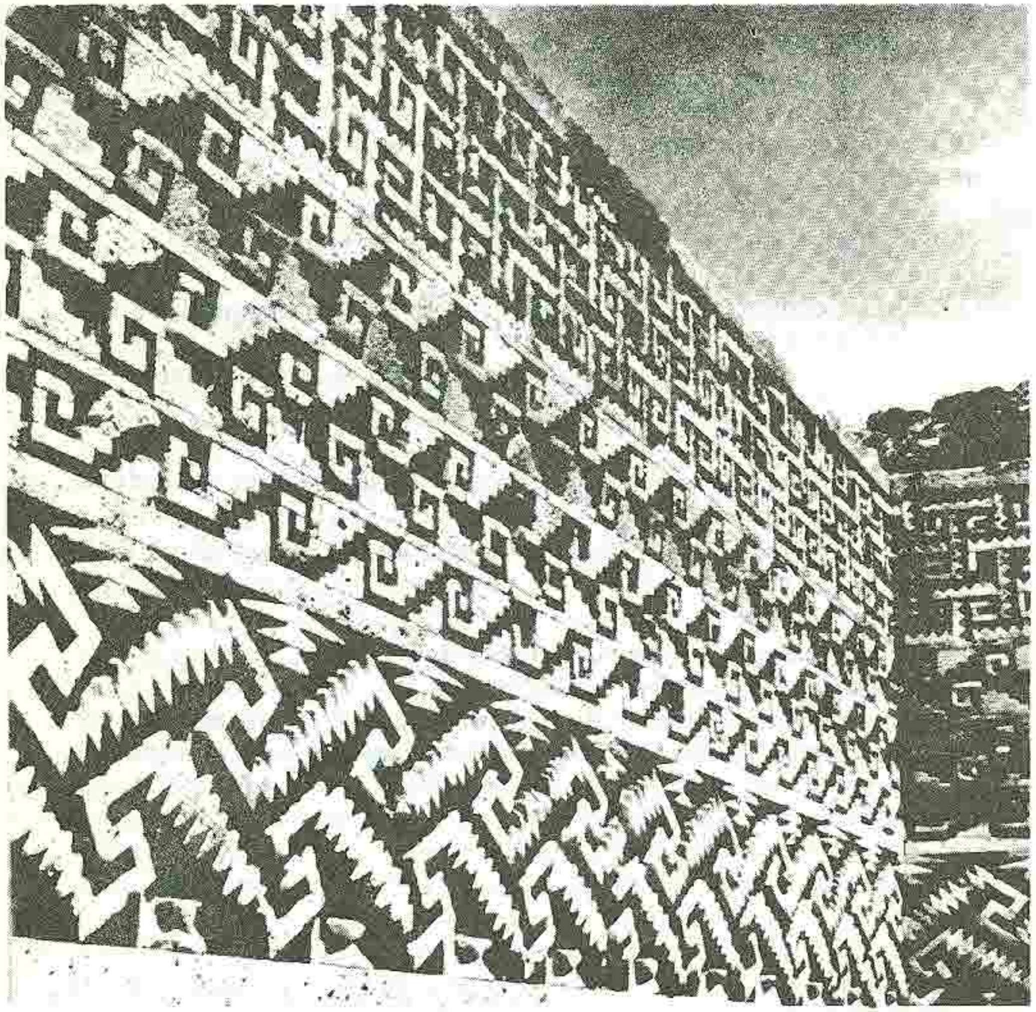
15. En un número de dos dígitos, la suma de los dígitos es 8. Si los dígitos se invierten el número se incrementa en 36. ¿Cuál es el número?

16. En un número de dos dígitos, la suma de los dígitos es 11. Si los dígitos se invierten, el número disminuye en 45. ¿Cuál es el número?

17. La distancia recorrida por un móvil se calcula multiplicando la velocidad por el tiempo que tarda en hacer el recorrido ($e = vt$).

A una velocidad constante, un automóvil A recorre cierta distancia en $\frac{3}{4}$ de hora y otro automóvil B recorre otra distancia en $\frac{1}{2}$ hora y entre los dos recorren 65 km. Con las mismas velocidades de antes, A recorre en $\frac{1}{2}$ hora la misma distancia que B en $\frac{3}{4}$ de hora.

¿A qué velocidad hizo sus recorridos A?
¿A qué velocidad hizo sus recorridos B?
¿Qué distancia recorrió A en el primer caso? ¿Y en el segundo?
¿Qué distancia recorrió B en el primer caso? ¿Y en el segundo?



Templo de Mitla. Si trasladamos las figuras hacia uno u otro lado a distancias convenientes, la figura vuelve a coincidir consigo misma.

SEPTIMA UNIDAD

GEOMETRIA PLANA

OBJETIVOS PARTICULARES

Al concluir el desarrollo de la presente unidad, el alumno:

I. Establecerá conceptos de traslación y paralelismo.
II. Establecerá conceptos de rotación y simetría central.
III. Establecerá conceptos de simetría axial y perpendicularidad.
IV. Hará construcciones con regla y compás.
V. Hará inferencias válidas utilizando los conocimientos de la unidad.
VI. Establecerá el concepto de congruencia, a partir de los conocimientos sobre rotaciones, traslaciones y simetrías.

Las transformaciones del plano desempeñan un importante papel en la geometría y, en general, en las matemáticas y sus aplicaciones. Como veremos más adelante, **una transformación del plano es una función del plano en el plano.** Una transformación del plano asocia a cada punto P del plano un punto P', también del plano, que se llama su *imagen* o su *transformado*.

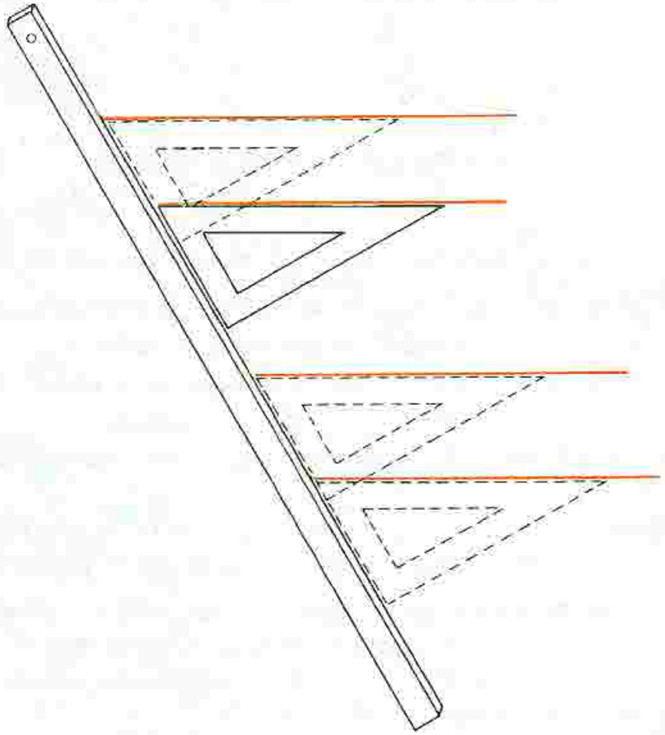
En esta unidad se analizarán las transformaciones del plano que conservan la distancia entre puntos.

1. TRASLACIONES

En esta sección estudiaremos las traslaciones del plano. Para ello conviene empezar recordando algunas ideas acerca de rectas paralelas.

Rectas paralelas

Sabemos ya muy bien qué son **rectas paralelas entre sí**. Las definimos como *rectas que están en un mismo plano y que no se intersecan*. Además, sabemos utilizar una regla y una escuadra para trazar dibujos que representen rectas paralelas entre sí:



Ejercicio 1.

a) Trace primero una recta y después, utilizando una regla y una escuadra, trace varias rectas paralelas a la primera.

b) Dibuje una recta y marque un punto fuera de ella. Llame l a la recta y P al punto. Trace una recta paralela a l y que pase por P.

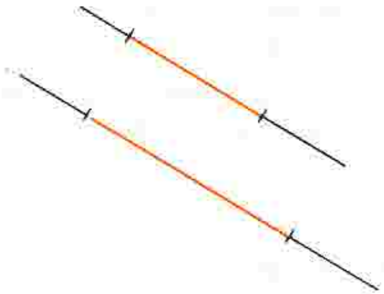
c) ¿Cuántas rectas puede trazar que sean paralelas a l y pasen por P?

d) Si una recta l_1 es paralela a l_2 y la recta l_2 es paralela a l_3 ¿es l_1 paralela a l_3?*

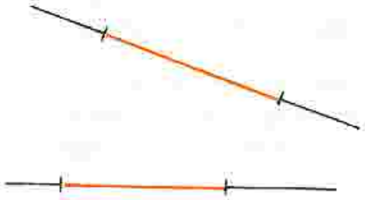
La propiedad que usted habrá observado al contestar la pregunta c) del ejercicio anterior se conoce como "El quinto postulado de Euclides" y dice:

> *Por un punto fuera de una recta pasa una y solamente una recta paralela a la recta dada.*

Además de hablar de rectas paralelas también se habla de segmentos paralelos. Se dice que dos segmentos son paralelos entre sí, si están contenidos en rectas paralelas.

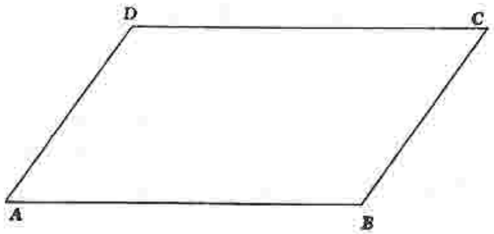


Segmentos paralelos



Segmentos no paralelos

Los lados de un cuadrilátero son segmentos. Se llama **paralelogramo** a un cuadrilátero tal que sus lados opuestos son paralelos



Si $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{DC}$ y $\overline{BC}$ es paralelo a $\overline{AD}$ entonces, por definición, $ABCD$ es un paralelogramo.

---

* A veces se conviene en decir también que *toda recta es paralela a sí misma*. Con esta convención, la relación "*es paralela a*" es una *relación de equivalencia* en el conjunto de todas las rectas del plano.

Ejercicio 2.

a) Utilizando una regla y una escuadra trace un paralelogramo tal que tres de sus vértices sean los siguientes puntos A, B, D:

b) Tres puntos no colineales determinan un paralelogramo *único*. ¿Por qué? (Recuerde el quinto postulado de Euclides.)

Aunque pueda parecer muy simple, la propiedad que usted observó en el ejercicio anterior es importante y se utilizará con frecuencia. Podemos enunciarla así:

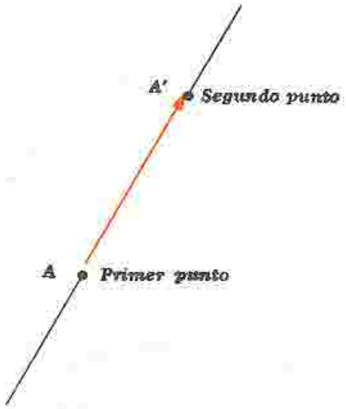
> *Tres puntos no colineales determinan un paralelogramo y solamente uno.*

Traslaciones

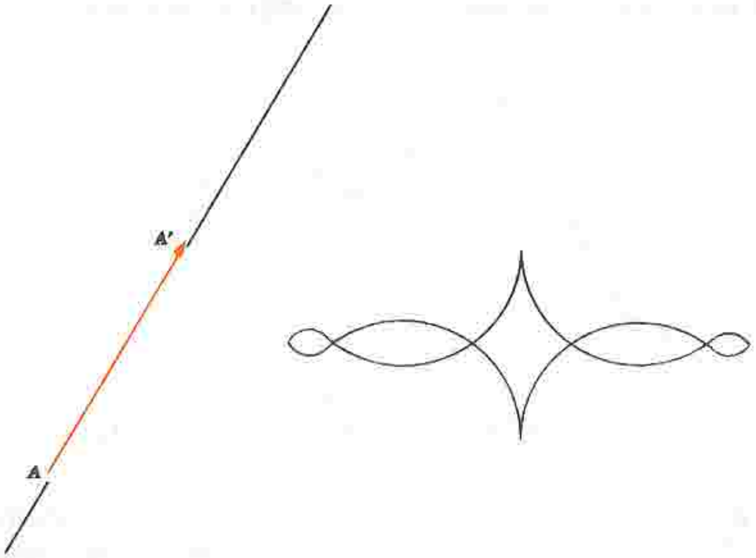
En la fotografía de una pared del Templo de Mitla, que aparece al principio de esta unidad, usted podrá observar cómo, a lo largo de una faja, se va repitiendo una misma figura, una y otra vez, dando así una agradable impresión de belleza. Esto se debe, sin lugar a duda, a que dichas figuras son invariantes bajo traslaciones. Es decir, que si trasladamos la figura hacia un lado, vuelve a coincidir consigo misma.

En lo que sigue analizaremos el concepto matemático de traslación. Empecemos con la siguiente actividad que nos dará una idea intuitiva del concepto de traslación del plano.

En primer lugar, para determinar una traslación *hay que dar una pareja ordenada de puntos*, es decir, dos puntos, de los cuales decimos cual es el primero y cual es el segundo. Al representarlos en un dibujo, para que nos acordemos de cual es el primero y cual el segundo, trazaremos una flecha:

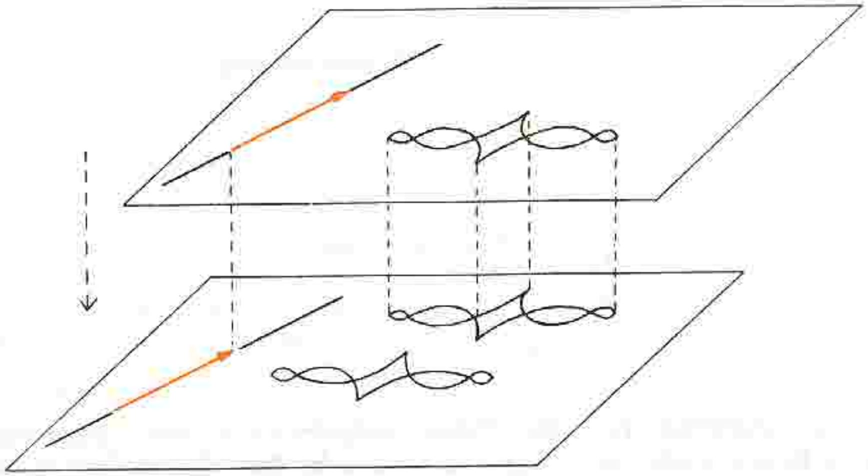


Consideremos ahora una figura cualquiera y vamos a decir cual es la figura trasladada (según la traslación determinada por la pareja de puntos (A, A')).

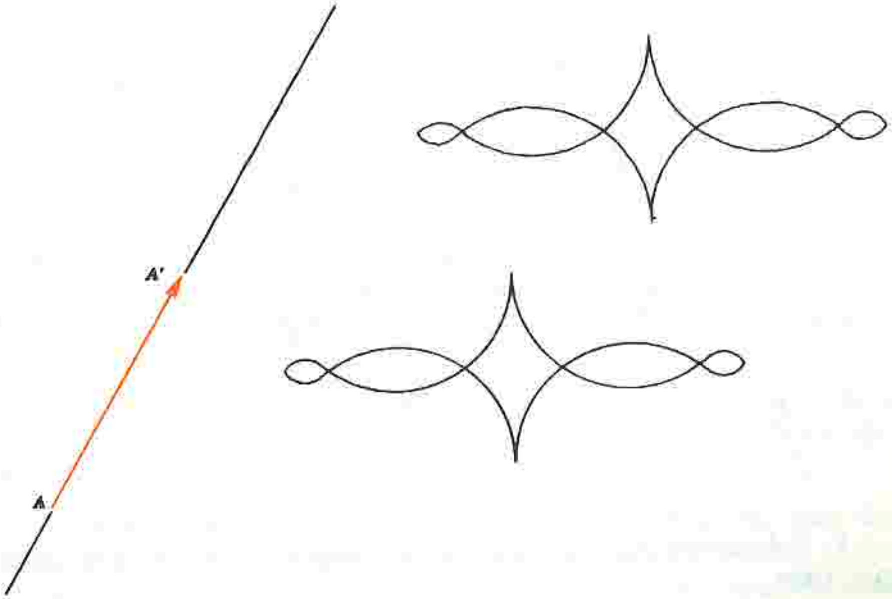


1. Colocamos encima una hoja de papel transparente y copiamos todo.

2. Colocamos ahora nuevamente la hoja de papel sobre la hoja original, pero de tal manera que la flecha del papel transparente se encuentre *a continuación de la flecha* original y *sobre la misma recta*:



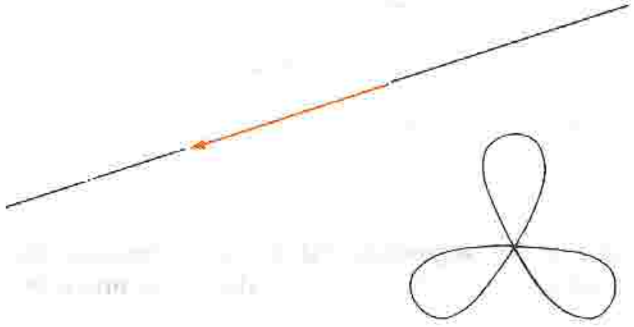
3. Colocando un papel carbón debajo de la figura de la hoja transparente calcamos ésta a la hoja original; obtenemos



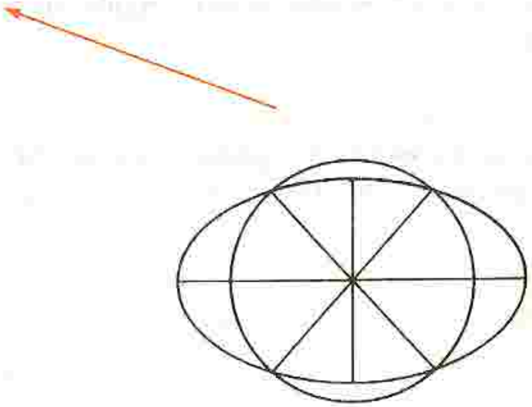
Decimos entonces que al trasladar la figura original, según la traslación determinada por (A, A'), obtenemos la figura calcada.

Ejercicio 3.

a) Traslade la siguiente figura (con el procedimiento descrito) según la traslación determinada por los puntos que se indican.

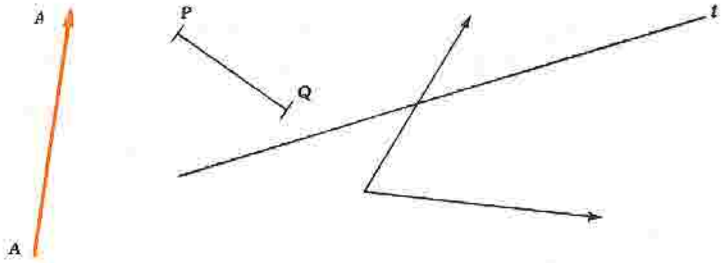


b) Proceda como antes con la figura siguiente.



Al trasladar una figura se obtiene otra figura que "tiene la misma forma y el mismo tamaño" que la anterior y que, además, es, en cierto sentido "paralela" a la anterior. Estas propiedades intuitivas puede observarlas en los ejercicios y ejemplos anteriores, así como en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 4. En la siguiente figura se ilustra un segmento $\overline{PQ}$, una recta l y un ángulo. Efectúe la traslación determinada por la pareja de puntos (A, A').



Observe que

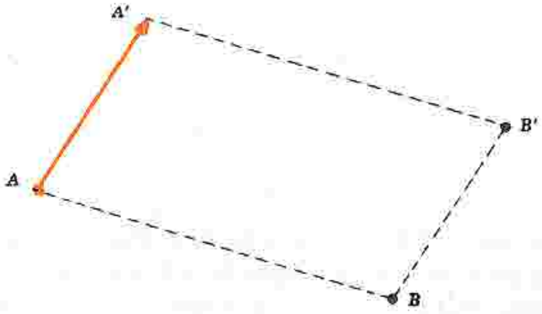
a) El traslado del segmento $\overline{PQ}$ es un segmento. Denótelo $\overline{P'Q'}$. La distancia entre P y Q es igual a la distancia entre P' y Q'. O sea, $PQ = P'Q'$.

b) La recta l se traslada en otra recta, digamos l'. Las rectas l y l' son paralelas.

c) El trasladado del ángulo es otro ángulo que mide lo mismo que el primero.

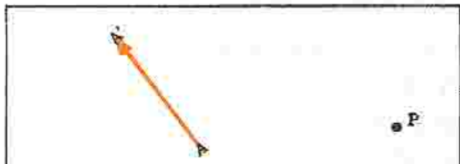
Propiedad característica de las traslaciones

Si hacemos la traslación del plano determinado por (A, A') y marcamos un punto B y su trasladado,

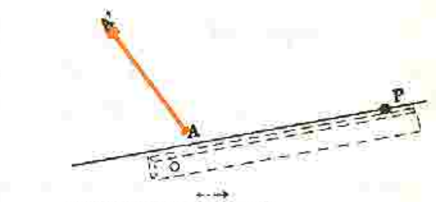


observamos que *con los cuatro puntos se forma un paralelogramo.*

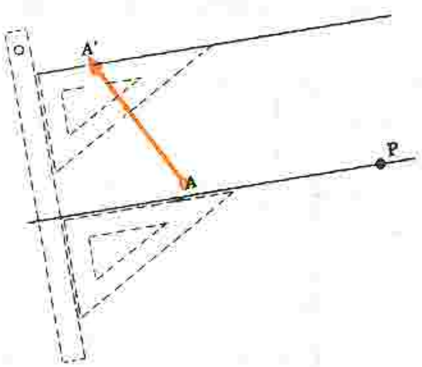
Esta observación permite encontrar el trasladado de cualquier punto que no esté en la recta $\overline{AA'}$ sin necesidad de seguir el procedimiento de calcar. En efecto, podemos proceder como sigue (vea también el Ejercicio 2).



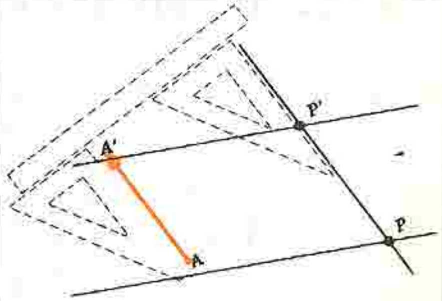
Marcamos los dos puntos que dan la traslación y el punto P que queremos trasladar.



Trazamos la recta $\overleftrightarrow{AP}$



Trazamos una paralela a $\overleftrightarrow{AP}$ que pase por A'.



Trazamos una paralela a $\overleftrightarrow{AA'}$ que pase por P.

De esta manera obtenemos el punto P' que es el trasladado del punto P, según la traslación determinada por (A, A').

Definición de traslación

A medida que hemos ido avanzando en el estudio de las matemáticas nos hemos dado cuenta de la importancia que tiene el uso de los números y otros símbolos para describir los fenómenos que se nos presentan.

En el caso de las *traslaciones*, el uso de coordenadas sirve para *precisar completamente este concepto.*

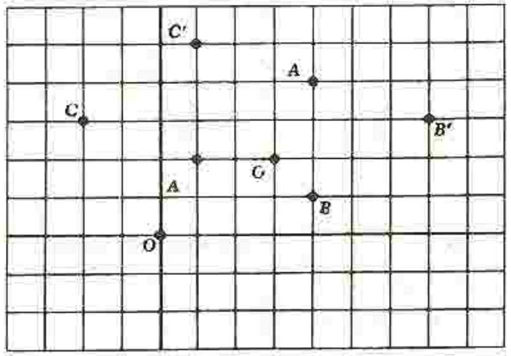
Veremos a continuación cómo hacer esto.

Consideremos un sistema de coordenadas en el plano y asociemos a cada punto P un punto P' obtenido de acuerdo con la orden siguiente:

> *Sume 3 a la abscisa y 2 a la ordenada.*

Por ejemplo, al punto $A = (1, 2)$ le asociamos el
punto $A' = (1 + 3, 2 + 2) = (4, 4)$;
al punto $B = (4, 1)$ le asociamos el punto
$B' = (4 + 3, 1 + 2) = (7, 3)$;
al punto $C = (-2, 3)$ le asociamos el punto
$C' = (-2 + 3, 3 + 2) = (1, 5)$;
al punto $O = (0, 0)$, es decir, al origen, le asociamos el punto
$O' = (0 + 3, 0 + 2) = (3, 2)$.

Dibujemos los puntos A, B, C, O y sus asociados A', B', C', O':



En general, la orden que dimos permite asociar a cada punto P del plano un punto P':

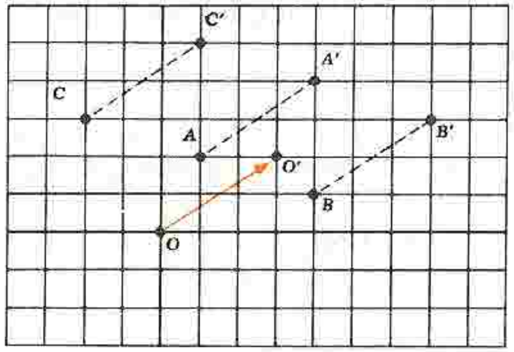
al punto $P = (x, y)$ se le asocia $P' = (x + 3, y + 2)$.

De esta manera se obtiene una *función* que tiene por *dominio el plano* y por *codominio el plano*. O, como se dice, una **transformación del plano.**

Como es costumbre cuando se trata de funciones para indicar que a un punto P se le asocia el punto P' se escribe $P \to P'$. Se dice también, en estos casos que *P se transforma en P'* o que *P' es el transformado de P.*

¿Qué relación tiene esta función con las traslaciones que se describieron intuitivamente antes?

Observamos fácilmente que al hacer la traslación determinada por los puntos (O, O') obtenemos precisamente la transformación dada por la orden anterior.



Las observaciones anteriores permiten dar la siguiente definición de traslación:

> *Una traslación del plano es una función del plano en sí mismo tal que a cada punto $P = (x, y)$ del plano le asocia un punto P' de acuerdo con*
>
> $$P = (x, y) \mapsto P' = (x + a, y + b),$$
>
> *en donde a y b son dos números que determinan la traslación.*

En el ejemplo anterior, $a = 3$, $b = 2$ y la traslación es $(x, y) \to (x + 3, y + 2)$.

Ejercicio 5. Considere la traslación dada por

$$(x, y) \to (x + 4, y - 2).$$

a) Encuentre en qué puntos se transforman los siguientes puntos.

$P = (-2, 2) \to P' = (-2 + 4, 2 - 2) = (2, 0)$
$Q = (0, 2) \to Q' = (0 + 4, 2 - 2) = (\quad , \quad)$
$R = (1, 3) \mapsto R' = (1$ ▨ $, 3$ ▨ $) = ($▨$,$ ▨$)$
$S =)(3, 3) \mapsto S' = ($▨$,$ ▨$) = ($▨$,$ ▨$)$
$T = (-2, 6) \mapsto T' =$ ▨

$O = (0,0) \mapsto O' =$

$U = (-1, -1) \mapsto U' =$

b) En un papel cuadriculado dibuje dos ejes de coordenadas y marque los puntos dados y sus trasladados.

c) Trace flechitas que unan cada punto con su trasladado y observe que todas ellas *son paralelas, tienen la misma longitud y el mismo sentido* (apuntan hacia un mismo lado).

Ejercicio 6. En el siguiente dibujo se ilustra la traslación $(x, y) \mapsto (x + 8, y - 8)$ aplicada al triángulo ABC. Se obtiene el triángulo $A'B'C'$.

a) Compruebe esta afirmación.

Después se ilustra la transformación

$$(x', y') \mapsto (x' - 2, y' + 12)$$

aplicada al triángulo $A'B'C'$. Se obtiene el triángulo $A''B''C''$.

$A = (2, 2)$

$B = (3, 5)$

$C = (-2, 4)$

$A' = (10, -6)$

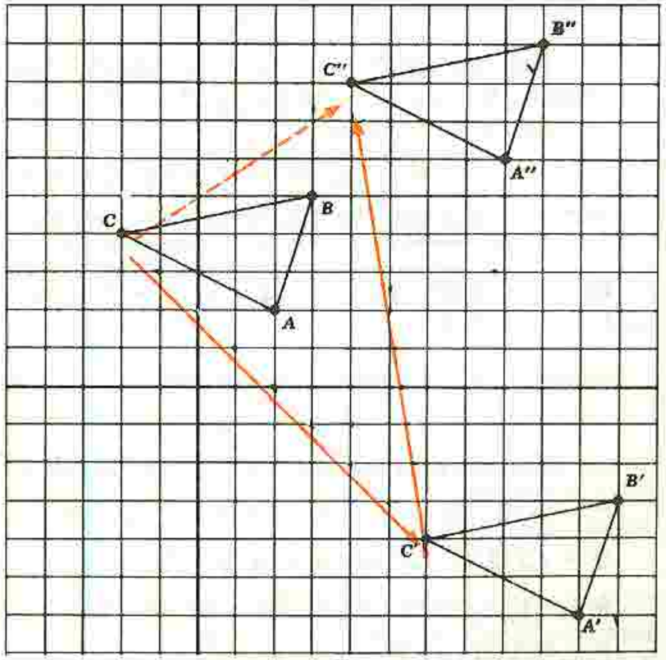
$B' = (11, -3)$

$C' = (6, -4)$

$A'' = (8, 6)$

$B'' = (9, 9)$

$C'' = (4, 8)$



b) Compruebe la afirmación anterior.

c) Compruebe que el triángulo $A''B''C''$ se puede obtener del triángulo ABC mediante la traslación

$$(x, y) \mapsto (x + 6, y + 4).$$

En el ejercicio anterior podemos observar claramente que si ejecutamos dos traslaciones, una después de otra, obtenemos como resultado una nueva traslación.

Este hecho se expresa diciendo que
La composición de dos traslaciones es una traslación.

Es fácil ver por qué es así. En efecto, si la primera traslación consiste en "sumar a a la abscisa y b a la ordenada" de cada punto y la segunda traslación consiste en "sumar a' a la abscisa y b' a la ordenada" de cada punto, al componer las dos traslaciones obtenemos la transformación que consiste en "sumar $a + a'$ a la abscisa y sumar $b + b'$ a la ordenada" de cada punto. Y esta transformación es una traslación. En símbolos:

Si aplicamos la traslación	$(x, y) \mapsto (x + a, y + b)$
y después la traslación	$(x', y') \mapsto (x' + a', y' + b')$
obtenemos la traslación	$(x, y) \mapsto (x + a + a', y + b + b')$.

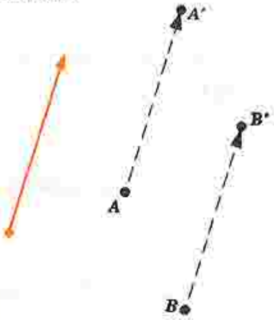
Ejercicio 7. ¿Qué traslación se obtiene al componer las traslaciones $(x, y) \mapsto (x + 2, y + 3)$, $(x', y') \mapsto (x' + 5, y' + 6)$? Ilustre esta situación en un sistema de coordenadas, aplicando las traslaciones a los puntos $P = (0, 0)$ y $Q = (3, -4)$.

Propiedades básicas de las traslaciones

Además de la *propiedad característica* de las traslaciones, hemos observado algunas otras a lo largo de nuestro estudio. Mencionaremos algunas.

En una traslación del plano.

1) la distancia entre dos puntos es igual a la distancia entre sus transformados.

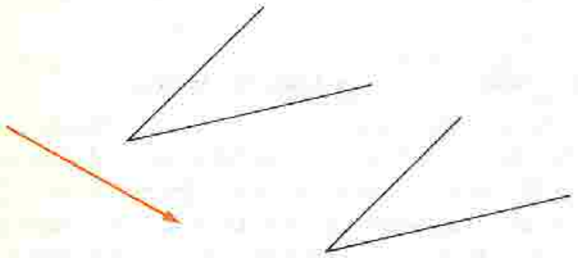


Si $A \rightarrow A'$ y $B \rightarrow B'$,

entonces $AB = A'B'$.

2) segmentos se transforman en segmentos, rayos en rayos y rectas en rectas.

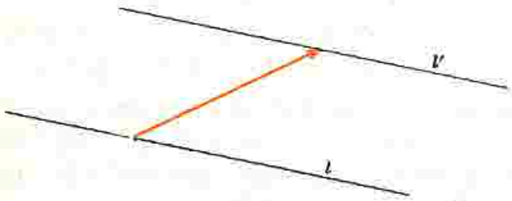
3) la medida de un ángulo es igual a la medida del ángulo transformado.



Si $\angle a \mapsto \angle a'$,

entonces $\measuredangle a = \measuredangle a'$.

4) cada recta es paralela a su transformada.



Si $l \mapsto l'$

entonces l y l'

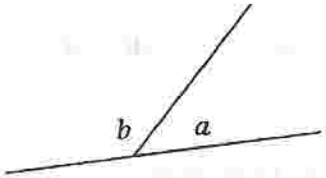
son paralelas.

5) La composición de dos traslaciones es una traslación.

En lo que resta de esta sección aplicaremos los conocimientos de traslaciones que hemos adquirido y en las secciones siguientes estudiaremos otras transformaciones del plano: las simetrías axiales y las rotaciones.

Angulos opuestos por el vértice

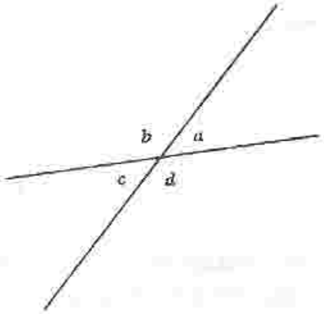
Dos ángulos como los siguientes reciben el nombre de *adyacentes*. La suma de sus medidas es 180°



$\angle a$ y $\angle b$ son adyacentes

$\measuredangle a + \measuredangle b = 180°$.

Dos rectas que se cortan en un punto determinan cuatro ángulos:



Se dice que

$\angle a$ y $\angle c$ son *opuestos por el vértice*

$\angle b$ y $\angle d$ son *opuestos por el vértice*

Es fácil demostrar, como veremos a continuación, que dos ángulos opuestos por el vértice tienen la misma medida. Dicho de otra manera,

> *Dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes.*

Para demostrar esto podemos razonar así:

Como $\angle a$ *y* $\angle b$ son adyacentes,

$$\measuredangle a + \measuredangle b = 180°,$$

es decir,

$$\measuredangle a = 180° - \measuredangle b \qquad (1)$$

Pero también $\angle c$ y $\angle b$ son adyacentes (observe bien la figura), y por consiguiente

$$\measuredangle c + \measuredangle b = 180°,$$

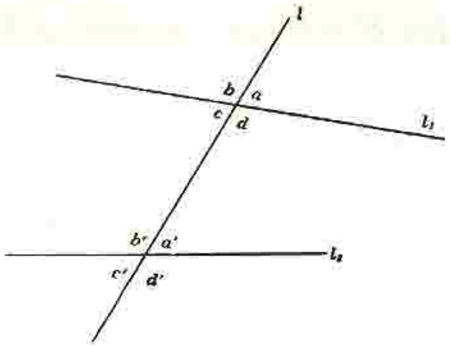
es decir

$$\measuredangle c = 180° - \measuredangle b. \qquad (2)$$

De las igualdades (1) y (2) obtenemos $\measuredangle a = \measuredangle c$ que es lo que queríamos demostrar.

Angulos correspondientes

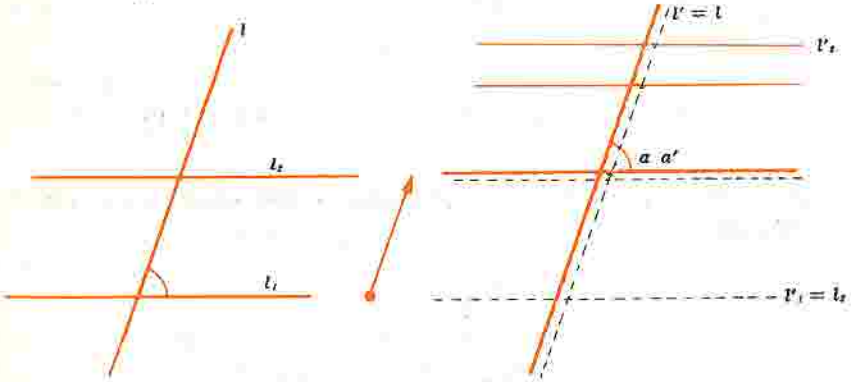
En una figura como la siguiente, formada por dos rectas l_1 y l_2 cortadas por otra recta l, (que se acostumbra llamar *secante* a l_1 y l_2) aparecen ocho ángulos. Se dice que $\angle a$ y $\angle a'$ son *correspondientes*



De hecho hay cuatro parejas de ángulos correspondientes: $\angle a$, $\angle a'$ son correspondientes; $\angle b$, $\angle b'$ también; $\angle c$, $\angle c'$ también y, finalmente, $\angle d$, $\angle d'$ son correspondientes también. Las dos parejas siguientes reciben otro nombre.

$\angle c$, $\angle a'$ son ángulos *alternos internos.*
$\angle d$, $\angle b'$ son también *alternos internos.*

Examinemos lo que ocurre con los ángulos correspondientes cuando las rectas l_1 y l_2 son paralelas. En este caso podemos hacer una traslación del plano de tal manera que la recta l se transforme en sí misma y la recta l_1 se transforme en l_2:

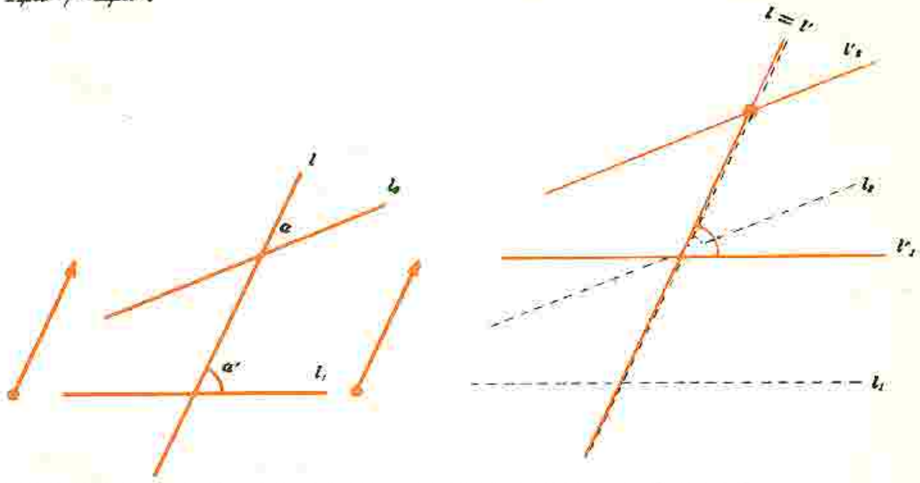


Con esta traslación el ángulo a' se transformó en el ángulo a y como las traslaciones conservan la medida de los ángulos, obtenemos que $\measuredangle a = \measuredangle a'$.

Así pues hemos demostrado que

> *Los ángulos correspondientes que se forman entre dos paralelas y una secante tienen la misma medida, es decir, son congruentes.*

Si hacemos lo mismo cuando l y l' no son paralelas vemos que $\measuredangle a \neq \measuredangle a'$:



Efectivamente, l'_1 es paralela a l_1 y l_2 no es paralela a l.

> *Si l_1 y l_2 no son paralelas, los ángulos correspondientes no tienen la misma medida.*

Ejercicio 8. Demuestre que:

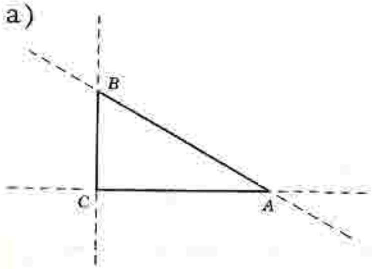
> a) *Los ángulos alternos internos que se forman entre dos paralelas y una secante tienen la misma medida.*
>
> b) *Si las rectas no son paralelas, los ángulos alternos internos no tienen la misma medida.*

(Utilice los resultados que hemos demostrado y que $\angle a$ y $\angle c$ son opuestos por el vértice.)

Suma de las medidas de los ángulos de un triángulo

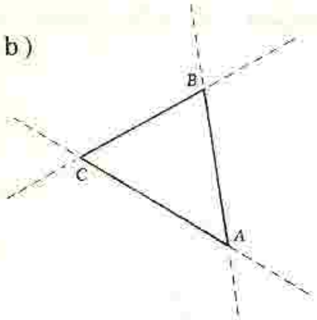
Ejercicio 9. Mida los ángulos en cada triángulo y encuentre la suma de sus medidas.

a)



$\measuredangle A = 30$ ▨
$\measuredangle B =$ ▨
$\measuredangle C =$ ▨
$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C =$ ▨

b)



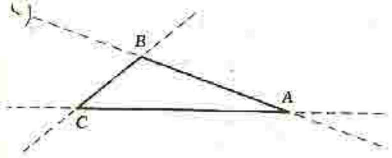
$\measuredangle A$

$\measuredangle B$

$\measuredangle C$

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C =$

c)



$\measuredangle A =$

$\measuredangle B =$

$\measuredangle C =$

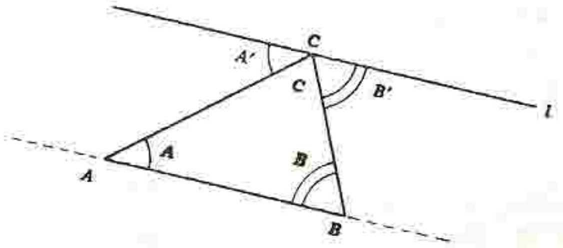
$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C =$

En este ejercicio podemos observar que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180°. (Posiblemente usted no haya obtenido en algún caso exactamente 180°, pero esto se debe a errores de medición inevitables.)

Este hecho vale para cualquier triángulo y, con lo que ya conocemos acerca de los ángulos alternos internos, podemos demostrarlo fácilmente. La propiedad es:

> *En cualquier triángulo, $\triangle ABC$, la suma de las medidas de sus tres ángulos es 180°. O sea,*
>
> $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$.

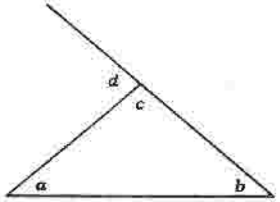
Demostración. Consideremos la recta l que pasa por el punto C y que es paralela a $\overline{AB}$, como se ilustra en la siguiente figura:



$\measuredangle A = \measuredangle A'$ porque $\angle A$ y $\angle A'$ son alternos internos entre paralelas.

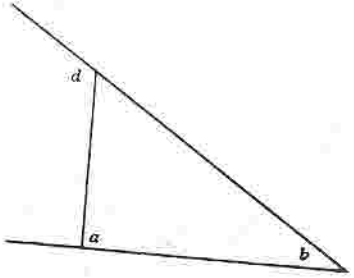
También $\measuredangle B = \measuredangle B'$ por la misma razón. Pero es claro que $\measuredangle A' + \measuredangle C + \measuredangle B' = 180°$, de donde $\measuredangle A + \measuredangle C + \measuredangle B = 180°$ que es lo que se quería demostrar.

Ejercicio 10. En la siguiente figura, $\measuredangle a = 30°$, $\measuredangle b = 40°$. ¿Cuánto mide el $\angle d$? (Utilice el resultado que acabamos de demostrar o el hecho de que $\angle c$ y $\angle d$ son suplementarios.)



Ejercicio 11. Utilizando las ideas del ejercicio anterior, demuestre que en *cualquier* triángulo, $\measuredangle d = \measuredangle a + \measuredangle b$. A los ángulos como el d se les llama *exteriores* y el resultado se suele enunciar diciendo que:

> *La medida de un ángulo exterior de un triángulo es la suma de las medidas de los dos ángulos no adyacentes del triángulo.*



Ejercicio 12.

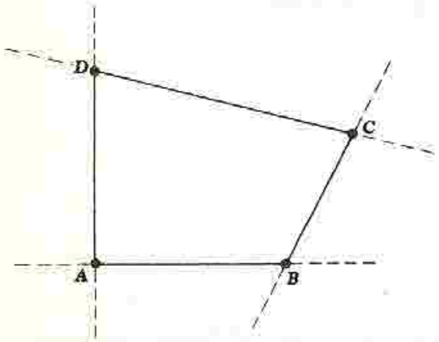
a) Un triángulo no puede tener dos ángulos rectos. ¿Por qué?

b) En un triángulo rectángulo, la suma de las medidas de sus dos ángulos agudos es 90°.

Suma de las medidas de los ángulos de un polígono

Ejercicio 13.

a) Encuentre la suma de las medidas de los ángulos del cuadrilátero siguiente.



∡A =
∡B =
∡C =
∡D =

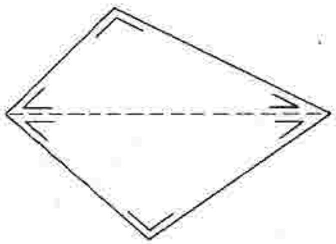
∡A + ∡B + ∡C + ∡D =

b) Haga lo mismo con otro cuadrilátero que usted trace.

Salvo errores de medición usted habrá obtenido en ambos casos que la suma es 360°.

¿Podríamos demostrar que este resultado es cierto para *cualquier* cuadrilátero? Es muy fácil.

En la siguiente figura observamos que al unir dos vértices opuestos en un cuadrilátero se obtienen 2 triángulos:

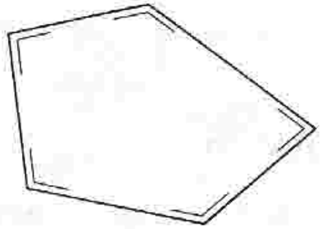


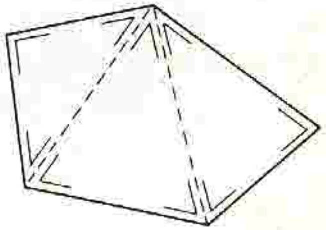
Observemos ahora que la suma de las medidas de los cuatro ángulos del cuadrilátero es igual a la suma de los seis ángulos obtenidos, tres de cada triángulo. Como la suma de las medidas de los ángulos de cada triángulo es 180° y hay 2 triángulos, resulta, en total 2 × 180° = 360°.

Hemos demostrado que

> *La suma de las medidas de los 4 ángulos de un cuadrilátero es* 2 × 180° = 360°.

El razonamiento que hemos hecho para cuadriláteros podemos extenderlo a polígonos convexos de cualquier número de lados. Por ejemplo, en un pentágono, observamos que lo podemos "triangular" y obtener 3 triángulos. La suma de las medidas de los ángulos del pentágono es igual a la suma de las medidas de todos los ángulos que aparecen en la triangulación. Como hay tres triángulos, dicha suma es 3 × 180°.





Ejercicio 14. Triangulando convenientemente un exágono, demuestre que la suma de las medidas de sus seis ángulos es 4 × 180°. Haga lo mismo para un polígono de 7 lados.

En general, al triangular convenientemente un polígono de n lados se obtienen $n - 2$ triángulos, por lo que

> *En un polígono de n lados, la suma de las medidas de sus ángulos es*
>
> $(n - 2)\ 180°$.

Polígonos regulares

En un triángulo equilátero, sus tres ángulos miden lo mismo. Como la suma de las medidas de sus ángulos es, según sabemos, 180°, cada uno de sus ángulos mide

$$\frac{180°}{3} = 60°.$$

> *Los ángulos de un triángulo equilátero miden* 60°

En un cuadrado, la suma de las medidas de sus cuatro ángulos es, como en cualquier cuadrilátero, 2 × 180°. Pero en el cuadrado sus cuatro ángulos miden lo mismo. Por consiguiente, cada ángulo de un cuadrado mide

$$\frac{2 \times 180^\circ}{4} = 90^\circ.$$

Los ángulos de un cuadrado son rectos.

En un *pentágono regular*, razonando de la misma manera, vemos que cada uno de sus ángulos mide

$$\frac{3 \times 180^\circ}{5} = 3 \times 36^\circ = 108^\circ.$$

Ejercicio 15. En forma análoga, calcule la medida de los ángulos de a) un eptágono regular (7 lados), b) un octágono regular y c) un polígono regular de 12 lados.

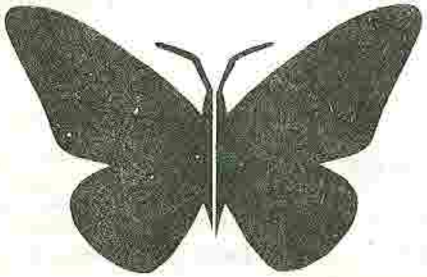
En general:

Los ángulos de un polígono regular de n lados miden

$$\frac{(n-2) \times 360^\circ}{n}$$

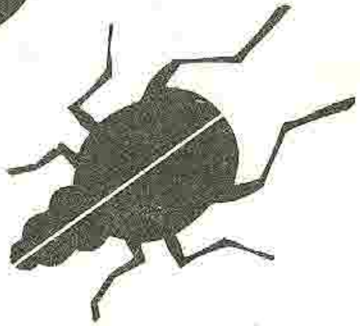
2. SIMETRIA AXIAL

Todos poseemos una idea muy clara de este tipo de simetría. Podemos observarla con frecuencia. En las siguientes ilustraciones se ha marcado una recta que se llama el **eje de simetría** de la figura. Se ha marcado una recta que se llama el eje... Hablamos en estos casos de **simetría axial** (axis significa eje en griego).

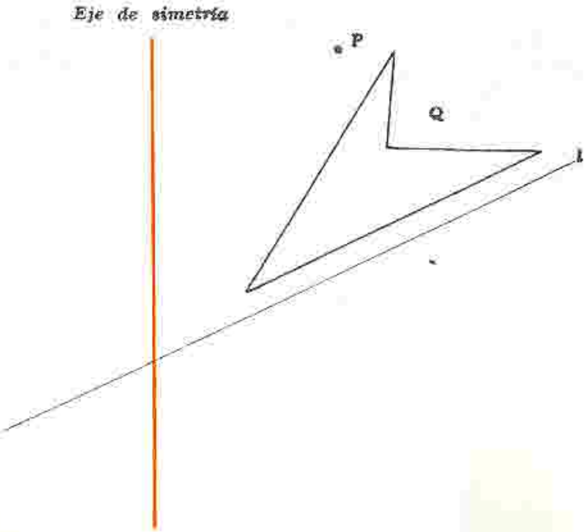


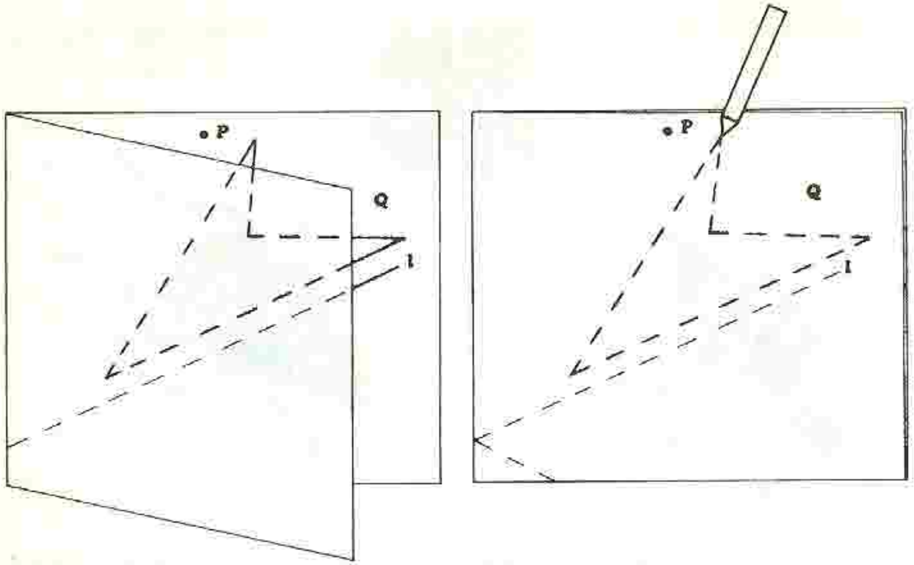
Actopan

Dornier DO215

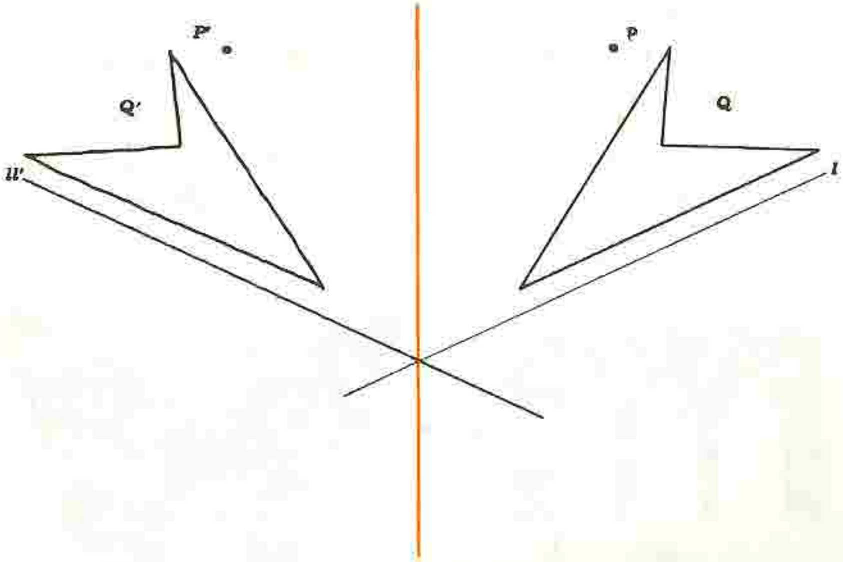


Es fácil usar un papel doblado para dibujar figuras simétricas con respecto a un eje de simetría (el doblez del papel). Por ejemplo; podemos dibujar con un lápiz blando una figura (en este caso la figura consta de un punto P, un cuadrilátero Q y una recta l) y marcamos un doblez que será el eje de simetría. Doblamos después el papel de manera que la figura quede en la parte interior". Frotamos después con un objeto romo la figura que vemos transparentar:





Al desdoblar el papel aparecerá una "copia al revés" de la figura original. Si es necesario, la marcamos un poco mejor y obtenemos la imagen simétrica de la original. En este caso constará del punto R' del cuadrilátero Q' y de la recta l'.



Ejercicio

a) Calque en media hoja de papel la figura a) y el eje de simetría y procediendo como en el ejemplo anterior, encuentre la figura simétrica.

b) Proceda de la misma manera con la figura b).

c) Si un punto está en el eje de simetría ¿cuál es su simétrico?

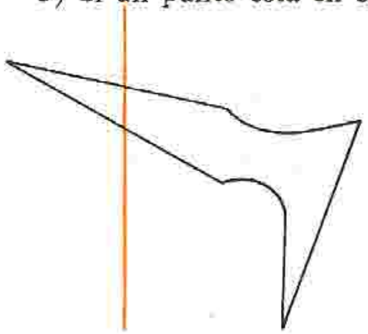


Fig. a)

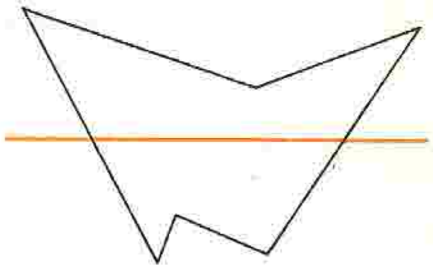


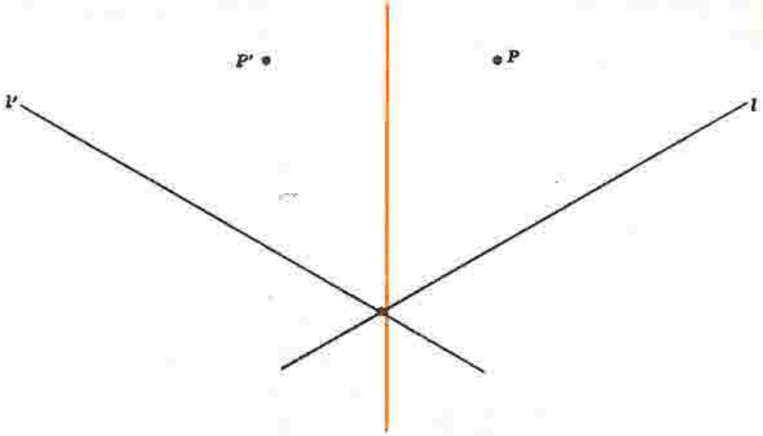
Fig. b)

Ejercicio. En la siguiente figura aparece un punto P y su simétrico con respecto al eje de simetría indicado. Aparece también una recta l y su simetrica l'.

a) ¿Interseca el segmento $\overline{PP'}$ al eje de simetría? ¿Ocurre esto siempre, cualquiera que sea el punto P?

b) Llame M al punto de intersección de $\overline{PP'}$ con el eje de simetría. Compruebe que M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$.

c) Compruebe que $\overline{PP'}$ es perpendicular al eje de simetría.



d) ¿Cuándo el simétrico de un punto es él mismo?

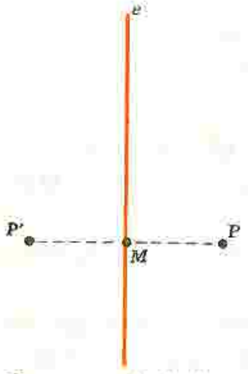
e) Observe que la figura simétrica de una recta es una recta. Si una recta corta al eje de simetría, ¿en qué punto corta al eje la recta simétrica? ¿Por qué?

f) Si una recta es paralela al eje de simetría ¿es paralela a su simétrica? ¿Por qué?

Propiedad característica de las simetrías axiales

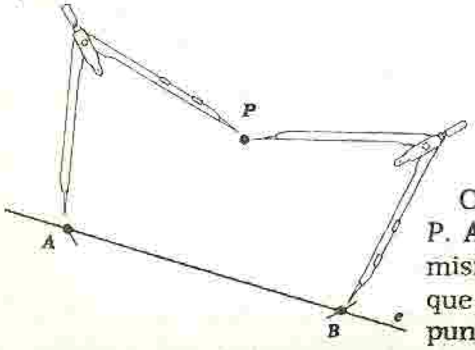
En los incisos a), b) y c) del ejercicio anterior hemos observado que

> *Si P y P' son dos puntos simétricos con respecto a un eje de simetría, entonces $\overline{PP'}$ es perpendicular al eje y lo corta en su punto medio.*

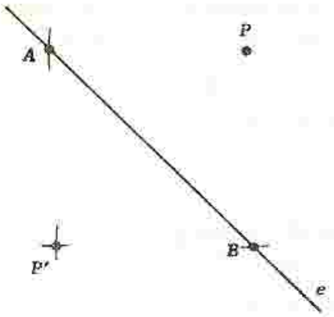


Si P y P' son simétricos, entonces $\overline{PP'}$ es perpendicular al eje e y M es el punto medio de $\overline{PP'}$.

Esta propiedad y una construcción con regla y compás que se vio en el primer curso de matemáticas permiten dibujar fácilmente el simétrico de cualquier punto con respecto a un eje. Recordemos dicha construcción:



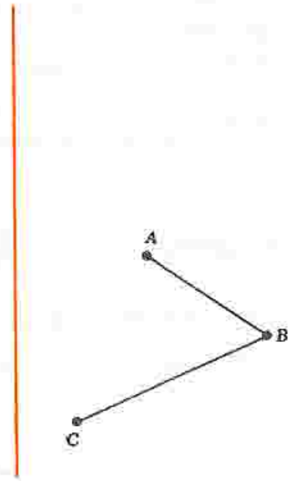
Consideremos un eje e y un punto P. Apoyando el compás en P y con una misma abertura trazamos dos arcos que intersequen al eje. Obtenemos dos puntos A y B.



Apoyando el compás primero en A y después en B y con la misma abertura de antes, trazamos dos arcos que se corten. De esta manera obtenemos el punto P', simétrico de P.

Ejercicio

a) Utilizando el método descrito encuentre la figura simétrica a la siguiente.



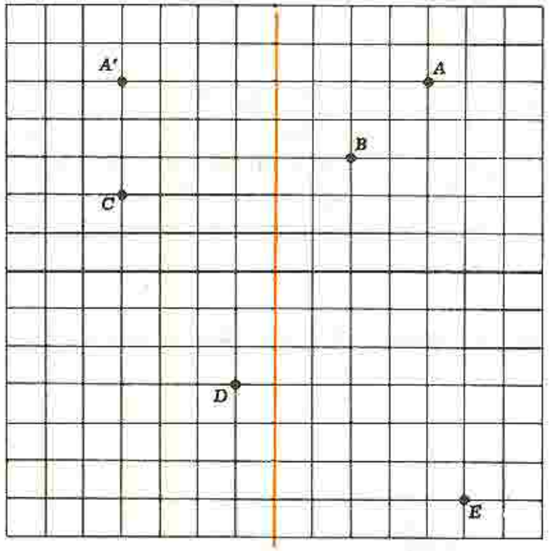
b) Llame A', B' y C' a los simétricos de los puntos A, B y C, respectivamente. Con un compás compruebe que $AB = A'B'$.

c) Compruebe con un compás que el ángulo $\angle ABC$ y $\angle A'B'C'$ tienen la misma medida.

Definición de simetría axial

Así como el uso de coordenadas permite, en el caso de las traslaciones, dar una definición precisa de dicho concepto, veremos que lo mismo ocurre para las simetrías axiales.

Si damos un eje de simetría, podemos trazar un sistema de coordenadas cuyo eje de ordenadas sea precisamente el eje de simetría. Procedamos así y marquemos varios puntos y sus simétricos:



Ejercicio 19.

a) Marque los puntos simétricos de A, B, C, D, E e indíquelos con A', B', C', D', E'.

b) Encuentre las coordenadas de A, B, C, D, E.

c) Encuentre las coordenadas de A', B', C', D', E'.

$A = \boxed{(4, 5)}$	$A' = \boxed{(-4, 5)}$
$B = \boxed{(2, 3)}$	$B' = \boxed{(\;\; , \;\;)}$
$C = \boxed{(-4, 2)}$	$C' = \boxed{(\;\; , \;\;)}$
$D = \boxed{(\;\; , \;\;)}$	$D' = \boxed{(\;\; , \;\;)}$
$E = \boxed{(\;\; , \;\;)}$	$E' = -\boxed{(\;\; , \;\;)}$

d) ¿Cómo son las *ordenadas* de un punto y su simétrico?

e) ¿Cómo son las *abscisas* de un punto y su simétrico?

f) Si $P = (x, y)$ y P' es el simétrico de P ¿qué coordenadas tiene P'?

Como el ejercicio es importante para lo que sigue daremos a continuación las respuestas para que usted las compruebe.

Los puntos son

$$A = (4, 5), A' = (-4, 5); B = (2, 3), B' = (-2, 3);$$
$$C = (-4, 2), C' = (4, 2);$$
$$D = (-1, -3), D' = (1, -3); E = (5, -6), E' = (-5, -6).$$

Las ordenadas de un punto y su simétrico son iguales. Las abscisas de un punto y su simétrico difieren por el signo. O sea, si $P = (x, y)$, el simétrico $P' = (-x, y)$.

Lo anterior sugiere la siguiente definición de simetría axial:

> *La simetría del plano con respecto al eje de ordenadas es la transformación del plano que asocia a cada punto* $P = (x, y)$ el punto $P' = (-x, y)$.

Recordemos que una *transformación del plano* es una *función del plano en el plano*, es decir, una función que tiene por *dominio el plano* y por *codominio también el plano*. Para indicar que a P se le asocia P' escribimos $P \mapsto P'$ y decimos que P *se transforma en* P', su simétrico en este caso.

Ejercicio 20. Marque en un sistema de coordenadas los puntos que se indican y sus simétricos con respecto al eje de las ordenadas, encontrando sus coordenadas.

$$(4, 1), (5, 6), (-3, 2), (0, 4), (0, 0), (-6, -3), (5, -2)$$

Propiedades básicas de la simetría axial

Además de la *propiedad característica* de la simetría axial que ya hemos discutido hemos visto algunas propiedades más. He aquí algunas de ellas.

1) La simetría axial conserva la distancia entre puntos. Es decir, si $A \mapsto A'$ y $B \mapsto B'$, entonces $AB = A'B'$.

2) La simetría axial transforma segmentos en segmentos, rayos en rayos y rectas en rectas.

3) La simetría axial conserva la medida de los ángulos.

4) La composición de dos simetrías axiales con respecto al mismo eje es la transformación idéntica, es decir, cada punto se transforma en sí mismo.

Ejercicio 21. Las simetrías axiales tienen muchas más propiedades.

a) En una simetría axial, ¿qué puntos se transforman en sí mismos?

b) Discuta el "cambio de orientación" en las simetrías axiales.

c) Al efectuar una simetría axial y a continuación otra, con respecto a otro eje (o con respecto al mismo) se obtiene una transformación que *no* es simetría axial. ¿Por qué? (Tiene que ver con el "cambio de orientación".)

d) ¿Cuándo una recta y su transformada son paralelas? Explique por qué.

e) ¿Cuándo una recta se transforma en sí misma? (Hay dos casos.)

f) Discuta la perpendicularidad de rectas en términos de la simetría axial.

Ejercicio 22. Se dice que una figura es simétrica con respecto a un eje, si con la simetría, ella se transforma en sí misma.

a) ¿Cuántos ejes de simetría tiene un triángulo equilátero? ¿Y un pentágono regular?

b) ¿Cuántos ejes de simetría tiene un cuadrado? ¿Y un exágono regular?

c) ¿Cuántos ejes de simetría tiene un polígono regular? (Hay dos casos.)

d) ¿Cuántos ejes de simetría tiene una circunferencia?

e) ¿Cuántos ejes de simetría tiene un rectángulo que no sea cuadrado?

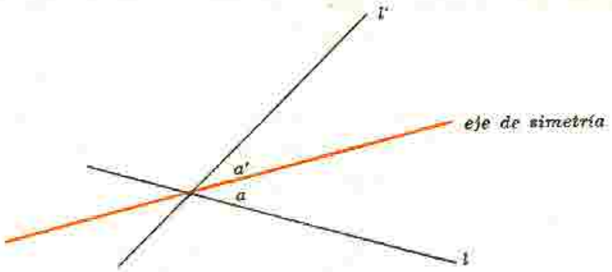
f) ¿Cuántos ejes de simetría tiene un rombo que no sea cuadrado?

g) ¿Cuántos ejes de simetría tiene un paralelogramo que no sea rectángulo ni rombo?

Triángulos isósceles y rombos

A partir de los conocimientos anteriores demostraremos ahora algunas propiedades.

> *Si una recta l interseca al eje de simetría, entonces éste biseca el ángulo formado por l y su simetría l'.*

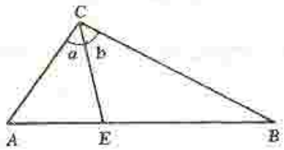


Debemos demostrar que *el eje es bisectriz del ángulo formado por l y l'*.

Como en la simetría *l* se transforma en *l'* y el eje se transforma en sí mismo, entonces el ángulo *a* se transforma en el ángulo *a'*. Como una simetría axial conserva las medidas de los ángulos, tenemos que $\measuredangle a = \measuredangle a'$, que es lo que se quería demostrar.

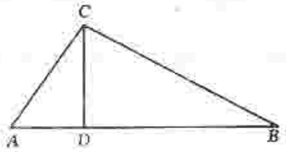
Triángulos isósceles

Consideremos un triángulo *ABC* y fijémonos en uno de sus vértices, digamos *C*. Entre los segmentos que tienen un extremo en *C* y el otro en la recta $\overrightarrow{AB}$ podemos mencionar los siguientes tres:



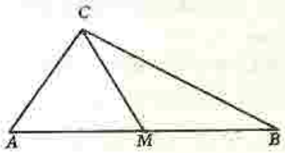
Bisectriz $\overline{CE}$

$\measuredangle a = \measuredangle b$



Altura $\overline{CD}$

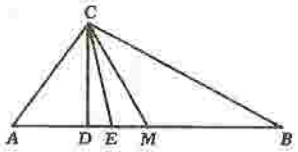
$\overline{CD}$ perpendicular a $\overline{AB}$



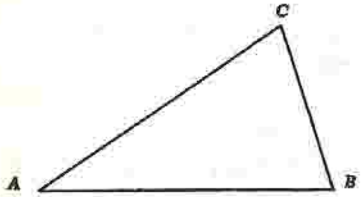
Mediana $\overline{CM}$

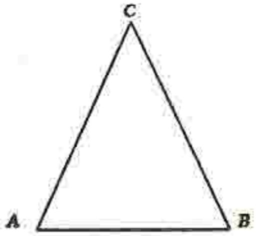
$AM = MB$

Como vemos en este ejemplo, estos tres segmentos son, en general, distintos:



Ejercicio 23. En los siguientes triángulos trace las bisectrices, las alturas y las medianas con uno de sus extremos en C.



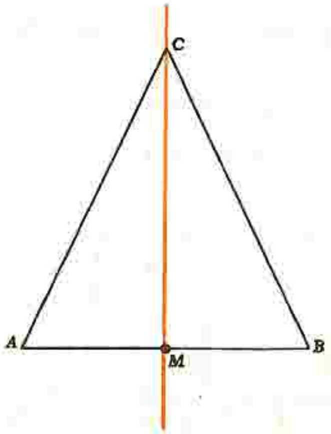


Excepto por posibles defectos del dibujo, en el ejercicio anterior usted habrá observado que en el primer triángulo, la bisectriz, la altura y la mediana son segmentos diferentes. En cambio, en el segundo, las tres coinciden. Esto se debe a que en este triángulo $AC = BC$. Es decir, es un triángulo isósceles.

Podemos demostrar que en cualquier triángulo isósceles ocurre lo mismo, es decir,

> *En un triángulo isósceles ABC, con* $AB = BC$*, la bisectriz* $\overline{CM}$ *es altura y mediana.*

Demostración. Consideremos la recta bisectriz $\overleftrightarrow{CM}$ del ángulo C; tomando esta recta como eje de simetría resulta que las rectas $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ son simétricas. Como $AC = BC$ y la simetría conserva las distancias resulta entonces que A y B son simétricos. Sabemos que si dos puntos son simétricos, el segmento que los une es perpendicular al eje de simetría y éste lo corta en su punto medio. Es decir, $\overline{CM}$ y $\overline{AB}$ son perpendiculares y $AM = MB$. En otras palabras, la bisectriz $\overline{CM}$ es altura y es también mediana.



Ejercicio 24. Aprovechando los razonamientos de la demostración anterior demuestre que los ángulos "de la base" (es decir, $\angle A$ y $\angle B$) son congruentes.

Ejercicio 25. Un ángulo de la base de un triángulo isósceles mide 70°. ¿Cuánto miden los demás ángulos?

Ejercicio 26. En un triángulo isósceles ABC, con $AC = BC$, el ángulo C es recto. ¿Cuánto miden los ángulos de la base?

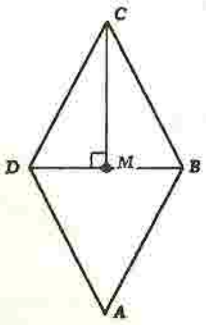
Ejercicio 27. En un triángulo isósceles ABC, con $AC = BC$, el ángulo C mide el doble del ángulo A. ¿Cuánto miden los ángulos del triángulo?

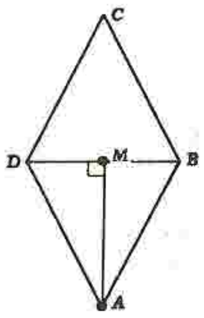
Rombos

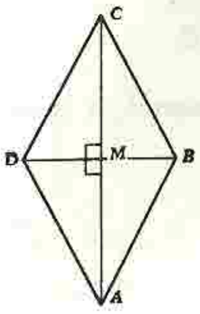
En el primer curso de matemáticas, al describir algunas construcciones geométricas con regla y compás, utilizamos una propiedad de las diagonales del rombo que entonces no demostramos pero dijimos que más adelante lo haríamos. Pues bien, con lo que acabamos de estudiar podemos demostrar ya que:

> *Las diagonales de un rombo son perpendiculares y se cortan en su punto medio.*

Demostración. Consideremos un rombo $ABCD$ y la diagonal $\overline{BD}$. Como el triángulo BCD es isósceles ($BC = CD$) la altura CM es mediana, es decir, M es el punto medio de DB. Hacemos ahora el





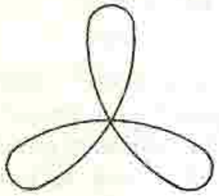


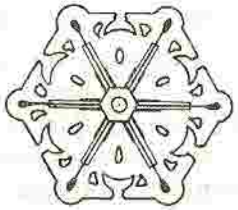
mismo razonamiento con el triángulo BAD $(BA = AD)$. La altura $\overline{AM}$ es mediana (M es el punto medio de $\overline{DB}$). Así pues, como $\overline{CM}$ y $\overline{MA}$ son perpendiculares a $\overline{DB}$, su unión $\overline{CA}$ es la otra diagonal. Así pues, hemos demostrado que las diagonales son perpendiculares y $\overline{AC}$ corta a $\overline{DB}$ en su punto medio. En forma análoga se puede demostrar que M es también el punto medio de $\overline{AC}$.

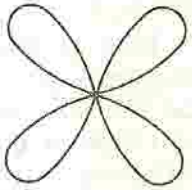
3. ROTACIONES

En las secciones 1 y 2 de esta unidad hemos estudiado las traslaciones y las simetrías axiales. Ambas son transformaciones del plano. Ahora analizaremos otro tipo de transformaciones del plano, las *rotaciones*.

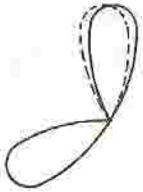
Hay figuras, como las que a continuación se ilustran que, al girarlas alrededor de un punto cierto número de grados, vuelven a coincidir consigo mismas.



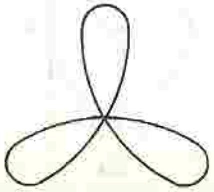




En tales casos, si tenemos una parte de la figura podemos construir las demás mediante lo que llamamos una rotación. Por ejemplo, si tenemos una parte de la primera figura, y le aplicamos una rotación de 120 grados obtenemos:



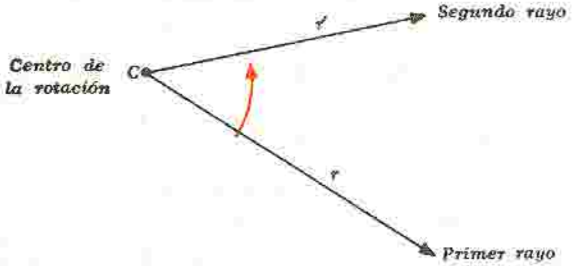
y repitiendo la rotación obtenemos toda la figura:



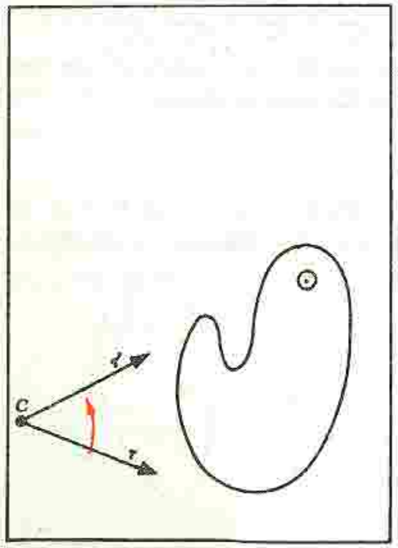
¿Con qué datos queda determinada una rotación? Desde luego, basta dar el *centro de rotación*, el **número de grados** del giro y el *sentido*.

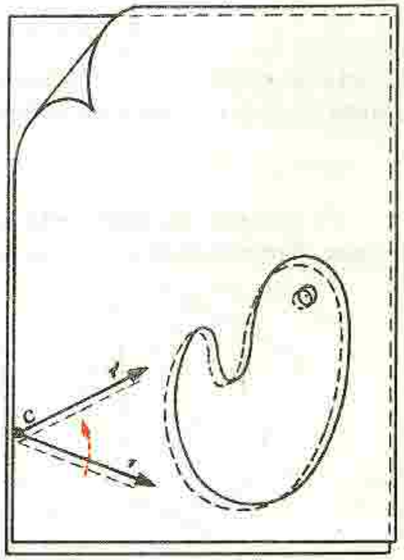
Así como para determinar una traslación se da una pareja ordenada de puntos (P, P').

para determinar el número de grados y el sentido de una rotación con centro en un punto C podemos dar simplemente una **pareja ordenada de rayos con vértice en** C.

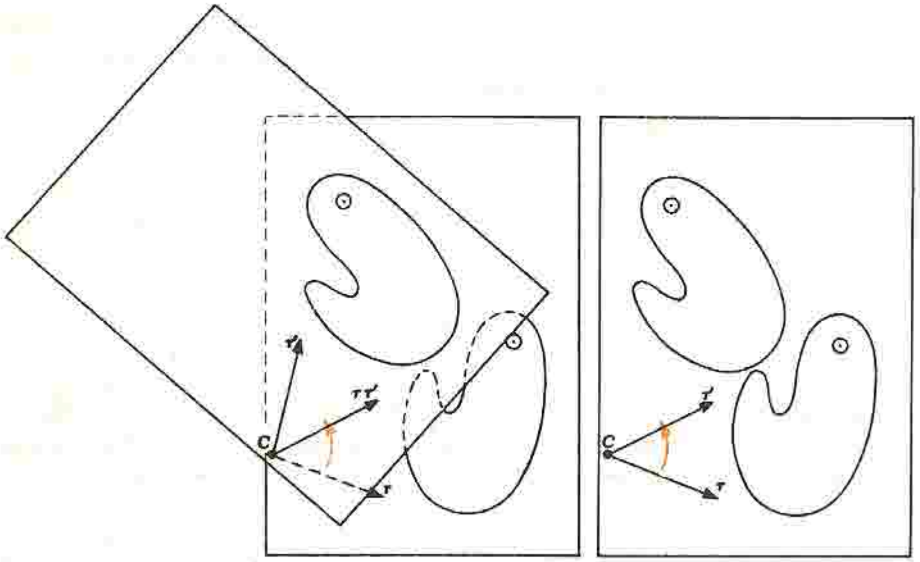


De manera análoga al caso de las traslaciones, para indicar cuál es el primer rayo y cuál el segundo podemos pintar una flechita como se hizo en el dibujo anterior.





Veamos ahora en qué se transforma una figura cualquiera mediante la rotación determinada por la pareja de rayos (r, r'). Dibujamos (r, r') en una hoja de papel y la figura que deseamos transformar. Calcamos todo eso en otra hoja de papel transparente. Colocamos ahora la hoja transparente sobre la original de tal manera que el rayo r del papel transparente caiga sobre el rayo r' del original (observe el dibujo a continuación). Calcamos después, con un papel carbón, la figura, en la nueva posición, al papel original.

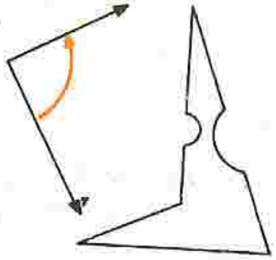


Decimos entonces que la nueva figura es la transformada de la primera según la rotación determinada por la pareja de rayos (r, r').

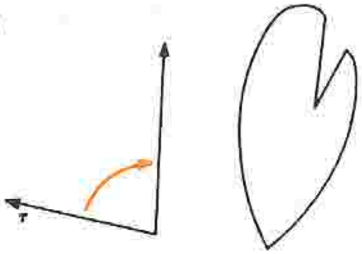
Ejercicio 28.

a) Calque en una hoja de papel la figura (a) y la pareja de rayos. Procediendo como en el ejemplo anterior encuentre la figura

a)



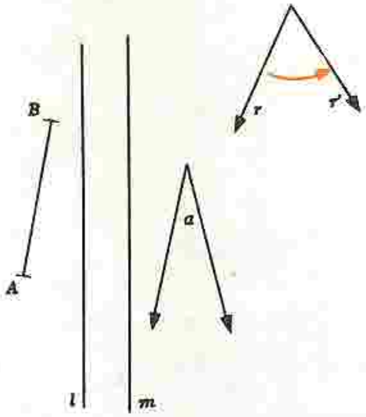
b)



transformada según la rotación determinada por la pareja de rayos (r, r').

b) Proceda de la misma manera con la figura (b).

Ejercicio 29. En la siguiente figura se ilustra un segmento $\overline{AB}$, dos rectas paralelas l, m y un ángulo a.



a) Procediendo como en el ejemplo anterior encuentre la figura transformada según la rotación indicada con (r, r').

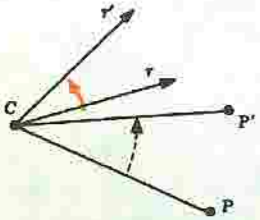
b) Compruebe que $\overline{AB}$ se transforma en un segmento, digamos $\overline{A'B'}$ y que $AB = A'B'$.

c) Las rectas l y m son paralelas. Compruebe que éstas se transforman en rectas, también paralelas entre sí.

d) El ángulo a se transforma en otro ángulo, digamos $\angle a'$ y los dos tienen la misma medida.

Propiedad característica de las rotaciones

Consideremos la rotación del plano dada por (r, r'), un punto cualquiera P y su transformado con respecto a esta rotación:



Observamos que:

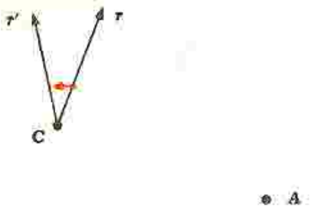
1) $CP = CP'$

2) $\measuredangle PCP' = \measuredangle rCr'$

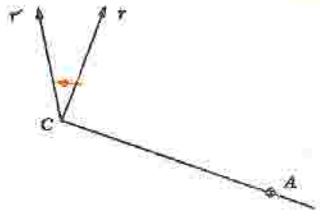
3) La flechita de $\overline{CP}$ a $\overrightarrow{CP'}$ tiene el mismo sentido que la de r a r'.

Ejercicio 30. Considere varios puntos, efectúe la rotación anterior y observe que valen las condiciones 1), 2) y 3).

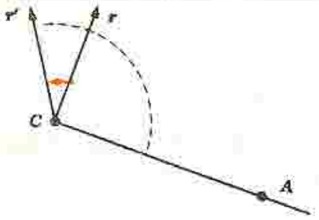
Esta observación permite encontrar el transformado de cualquier punto, según una rotación, sin necesidad de seguir el procedimiento de calcar. En efecto, podemos proceder como sigue:



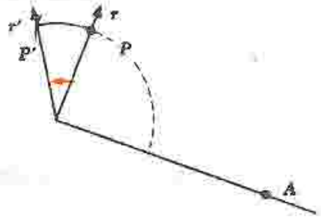
Rotación y punto dados.



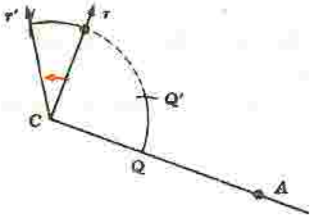
Trazamos el rayo CA



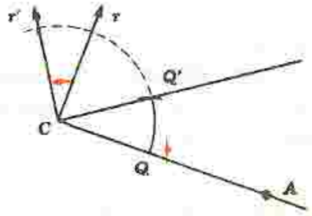
Trazamos un arco con centro en C.



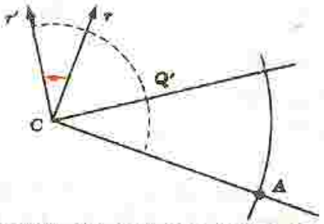
Medimos PP'



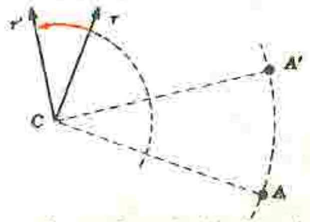
Marcamos Q' de tal manera que PP' = QQ'.



Trazamos el rayo CQ'.



Trazamos un arco con centro en C que pase por A y corte a CQ'.



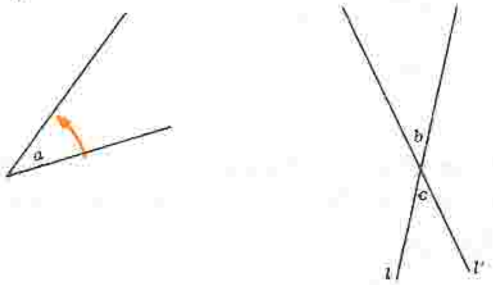
A' es el transformado de A según la rotación dada.

Propiedades de las rotaciones

Las rotaciones, al igual que las traslaciones y las simetrías axiales, también pueden estudiarse utilizando coordenadas. Sin embargo, por ahora no se hará así, pues para expresar las coordenadas de los puntos transformados según una rotación, conviene usar unas funciones llamadas trigonométricas, las cuales todavía no conocemos.

Aquí nos limitaremos a mencionar algunas de las propiedades básicas de las rotaciones.

1. Las rotaciones conservan la distancia entre dos puntos.
2. Las rotaciones transforman segmentos en segmentos, rayos en rayos y rectas en rectas.
3. Las rotaciones conservan la medida de los ángulos.
4. La composición de dos rotaciones con un mismo centro es una rotación.
5. Las rotaciones transforman rectas paralelas en rectas paralelas.
6. La medida de dos de los ángulos formados por una recta y su transformada según una rotación es igual a la medida del ángulo que determina la rotación (lo suponemos distinto de 180°). Observe la figura:

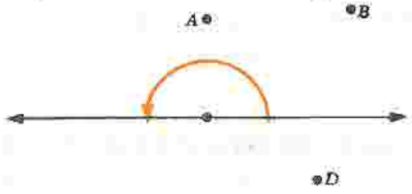


Si $l \rightarrow l'$, entonces
$\measuredangle a = \measuredangle b = \measuredangle c$

Ejercicio 31. Observe que si en una rotación de 180° una recta l se transforma en l', entonces l y l' son paralelas entre sí.

Ejercicio 32.

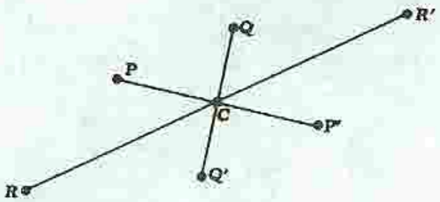
a) Encuentre los puntos asociados a los puntos A, B y D, según la rotación de 180° que se indica en la siguiente figura.



b) Llame A', B' y D' a los transformados de A, B y D. Observe que el centro de rotación está en el segmento AA' y es su punto medio. Haga lo mismo con BB' y DD'.

A las rotaciones de 180° *se les llama simetrías centrales* y quedan caracterizadas por la propiedad b) del ejercicio anterior. Dicho de otra manera,

> *La simetría central con respecto a un punto C es la transformación del plano que a cada punto P asocia el punto P' determinado por las condiciones*
>
> 1. *P, C y P' son colineales.*
>
> 2. $PC = CP'$.



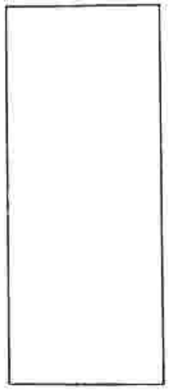
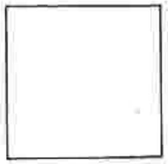
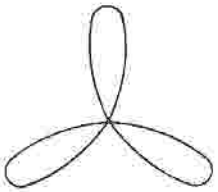
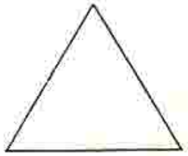
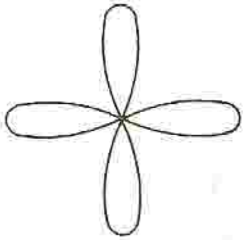
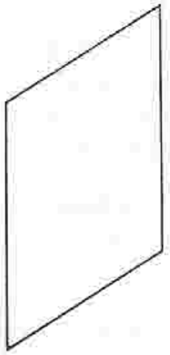
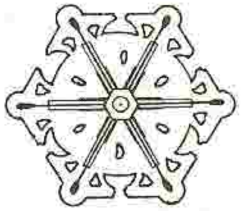
Ejercicio 33. En un sistema de coordenadas cartesianas marque varios puntos, encuentre sus coordenadas y encuentre sus transformadas de acuerdo con la regla

$$(x, y) \rightarrow (-x, -y).$$

Observe que esta transformación es la simetría central con respecto al origen.

Se dice que un punto es centro de simetría de una figura si ésta se transforma en sí misma al aplicar la simetría central con respecto al punto.

Ejercicio 34. ¿Cuáles de las siguientes figuras tienen centro de simetría?

Ejercicio 35. ¿Qué polígonos regulares tienen simetría central y cuáles no?

Ejercicio 36. Utilizando la simetría central (rotación de 180°) y algunas de sus propiedades, demuestre nuevamente que la medida de los ángulos opuestos por el vértice es la misma.

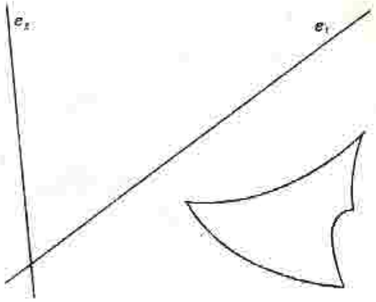
Ejercicio 37.

a) Aplique la *simetría axial* a la siguiente figura, con respecto al eje e_1.

b) A la figura obtenida aplique la *simetría axial*, ahora con respecto al eje e_2.

c) ¿Puede obtener la última figura a partir de la primera mediante una rotación? ¿Con qué centro?

d) Compare la medida del ángulo que forman e_1 y e_2 y la medida del ángulo de rotación.



4. FIGURAS CONGRUENTES

Desde el primer curso de matemáticas se habló algo de congruencia. Decíamos que por "figuras congruentes" se entendía "figuras que tienen la misma forma y el mismo tamaño". Pero no se precisó mucho el significado de estas frases.

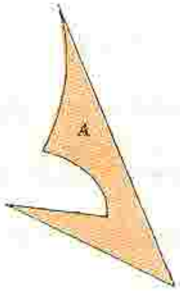
Solamente se habló con más precisión en el caso de que las figuras fueran segmentos o ángulos. Se dijo que

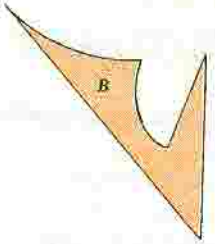
> *Dos segmentos son congruentes si tienen la misma longitud. Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida.*

Ahora bien, una **vez** estudiados los conceptos de traslación, simetría axial y rotación podemos dar la definición de congruencia para figuras planas cualesquiera.

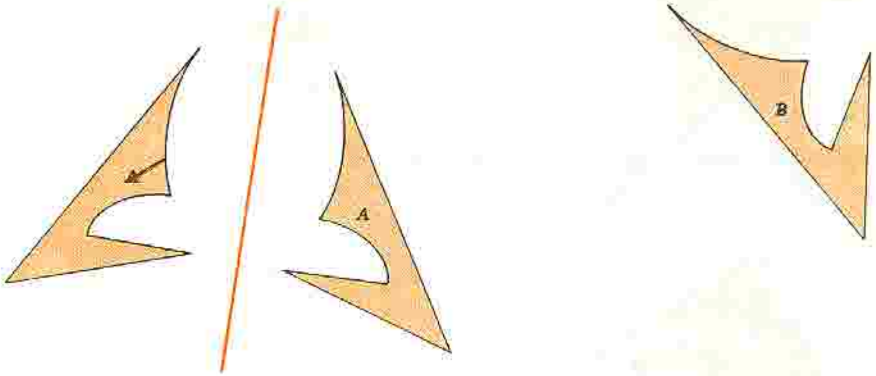
> ***Dos figuras del plano son congruentes si se puede transformar una en la otra mediante traslaciones, rotaciones y simetrías axiales.***

Por ejemplo, las figuras *A* y *B* siguientes son congruentes.

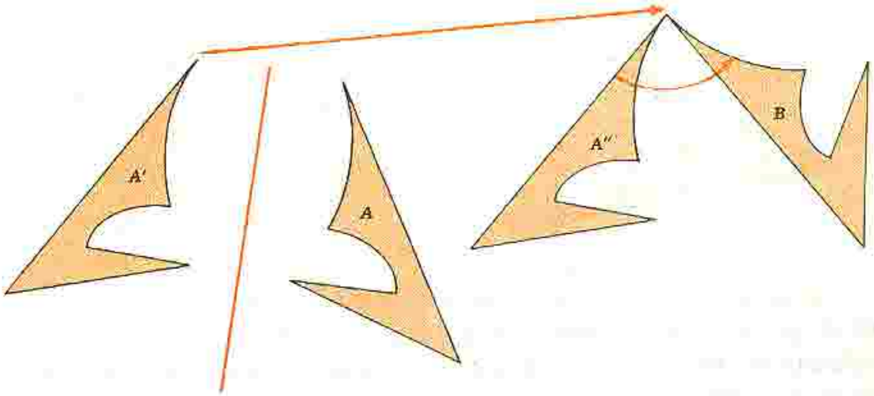




En efecto, podemos hacer una simetría axial. La figura *A* se transformará en una figura *A'*.



Trasladamos después la figura *A'* y obtenemos *A''*,

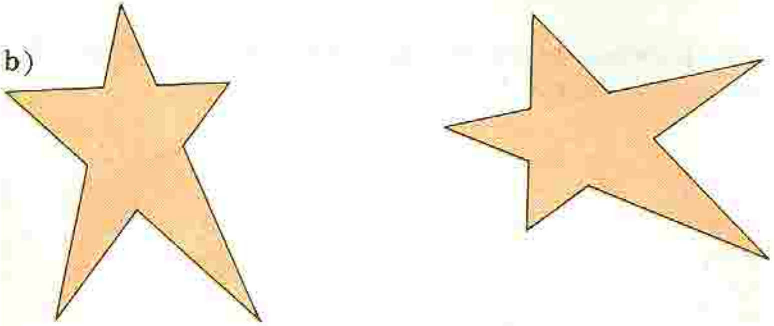


la cual se transforma en *B* mediante una rotación.

Ejercicio 38. En cada inciso encuentre transformaciones que indiquen que las figuras son congruentes

a)

b)



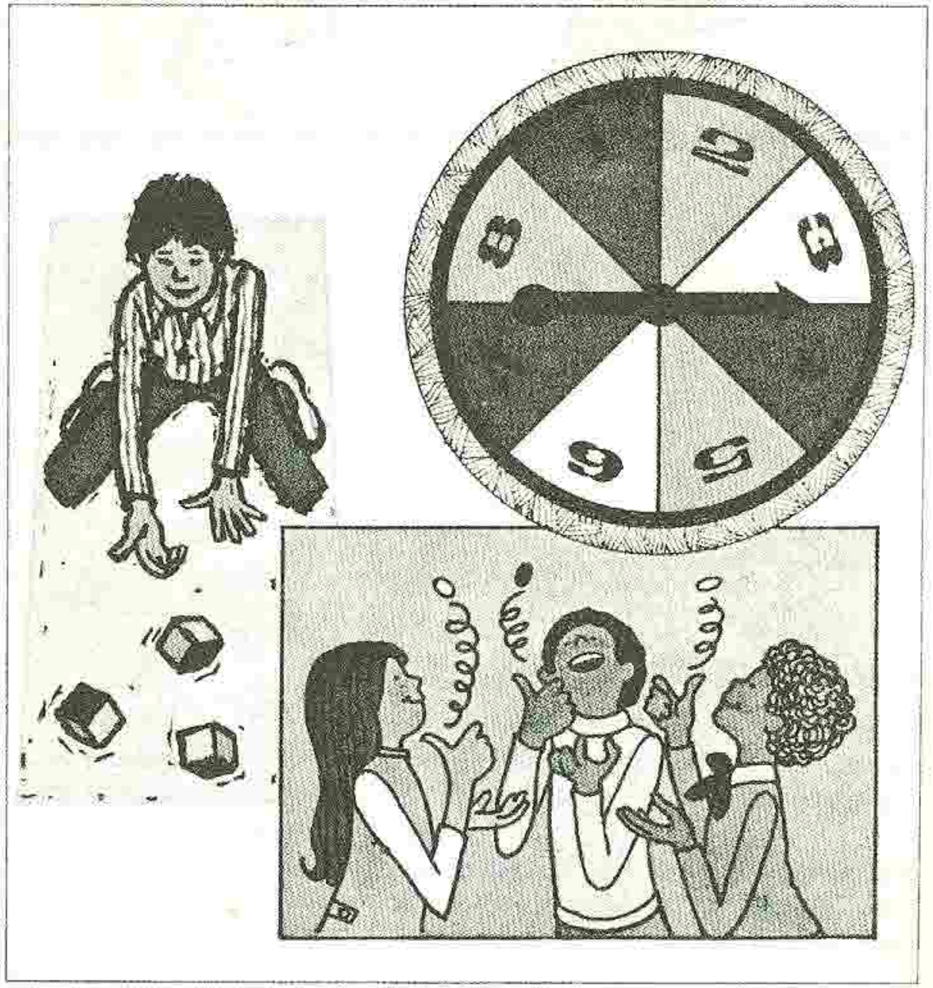
c)

d)

Observación. Conviene aquí observar nuevamente (lo hicimos en el primer curso cuando hablamos de congruencia) que en matemáticas es frecuente usar algunas expresiones con más precisión que en el lenguaje común y corriente.

Por ejemplo, en el lenguaje usual, al referirnos a objetos que tienen características comunes decimos que éstos "son iguales". Así, en los incisos del ejercicio anterior se diría que las figuras "son iguales".

Sin embargo, en matemáticas se acostumbra reservar la expresión "es igual a" para indicar "es el mismo que". Así, por ejemplo, si a y b denotan números y escribimos $a = b$ (a es igual a b) estamos simplemente indicando que el número representado por a es el mismo que el número representado por b. Por otro lado, no conviene decir que las siguientes figuras "son iguales", pues como subconjuntos del plano, son distintas (no constan de los mismos puntos). Por ello, según acabamos de ver, conviene utilizar la expresión "son congruentes".



OCTAVA UNIDAD

ESTADISTICA Y PROBABILIDAD

OBJETIVOS PARTICULARES:

Al terminar el estudio de esta unidad, el alumno. . .

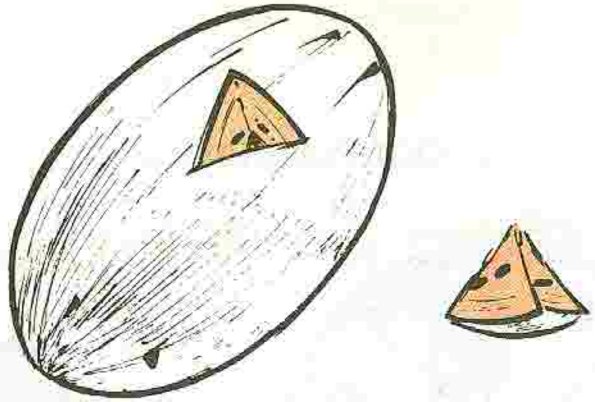
I. Inferirá datos estadísticos a partir de una muestra tomada al azar.
II. Calculará los parámetros estadísticos media, mediana y moda, a partir de un conjunto de datos.
III. Construirá tablas y diagramas de frecuencia a partir de un conjunto le datos.
IV. Calculará la probabilidad de un evento aplicando las operaciones lógicas; negación, conjunción y disyunción.

1. MUESTREO

Posiblemente usted ha observado a algunos vendedores que ofrecen a sus clientes como "muestra" una pequeña porción de alguna fruta. Una vez que el cliente prueba la muestra, tiene ya una idea sobre la calidad de toda la fruta.

Cuando un doctor desea realizar un examen de sangre a alguno de sus pacientes no analiza toda la sangre del paciente, únicamente toma una muestra y en ella realiza el análisis requerido. El doctor procede de esta manera porque sabe que a partir del análisis de la muestra tendrá información acerca de toda la sangre del paciente.

En muchas ocasiones es necesario obtener información de conjuntos muy numerosos; pero ello, como veremos a continuación, puede plantear serios inconvenientes. En esos casos lo que se puede hacer es obtener la información a partir de una muestra; es decir, **considerando sólo algunos elementos del conjunto.**



Ejemplo. En cierta población situada a la orilla de un río contaminado se piensa que la mayoría de los habitantes tienen, en la grasa de su cuerpo, concentraciones de D.D.T. que rebasan el límite de seguridad.

Un investigador desea cuantificar esa concentración de D.D.T. en las personas. Practicar un análisis a las 4 000 personas de la población resultaría muy laborioso, se requeriría mucho tiempo y el costo sería muy elevado.

Es por esto que el investigador decide realizar su estudio únicamente con una muestra de 200 personas.

Un procedimiento para inferir un resultado a partir de una muestra consiste en formar dicha muestra tomando al azar algunos elementos del conjunto y aceptar, con base en la teoría del muestreo, que lo observado en esa muestra se presenta en la misma proporción en todo el conjunto que se estudia.

Aunque generalmente el resultado que se infiere a partir de la muestra y la situación real en el conjunto no son iguales, la aproximación que se obtiene es de mucha utilidad en la práctica.

Después de realizado el estudio en la muestra resulta que de las 200 personas examinadas, 50 están altamente contaminadas. El investigador establece y resuelve la siguiente proporción:

$$\frac{50}{200} = \frac{x}{4\,000}$$

$$x = \frac{4\,000 \times 50}{200} = 1\,000,$$

e infiere que 1 000 personas de la población están contaminadas.

Ejercicio 1 Tal como se hizo en el ejemplo, use proporciones para resolver los siguientes problemas.

1. De 2 500 tornillos se toma una muestra al azar de 300. Si en esta muestra se encuentran 125 defectuosos, ¿probablemente cuántos tornillos defectuosos habrá entre los 2 500?
2. Un sociólogo visita una población de 2 500 personas, toma una muestra al azar de 350 personas y encuentra que, de éstas, hay 100 que tienen tendencia al conformismo. ¿Cuántas personas de la población, es probable que tengan tendencia al conformismo?
3. En un laboratorio se aplica cierta medicina a 275 personas enfermas de tifoidea. De estas personas, 200 reaccionaron favorablemente al tratamiento. Si se aplica esta medicina a 5 000 personas enfermas de tifoidea, ¿probablemente cuántas reaccionarán favorablemente al tratamiento?
4. De un grupo de 1 600 personas, se toma al azar una muestra de 80, se les aplica un cuestionario y resulta que, de éstas, hay 32 personas que tienen preferencia por el color amarillo. ¿Aproximadamente cuántas personas de las 1 600 tienen preferencia por el color amarillo?
5. De una urna con 450 canicas se extraen 60 al azar y se observa que 35 son azules y 25 son amarillas. ¿Aproximadamente cuántas canicas azules hay en la urna? ¿Y cuántas amarillas?
6. En una población de 2 500 habitantes, se eligen 175 personas al azar y resulta que, de ellas, 100 requieren atención médica. ¿Aproximadamente cuántas personas de esa población requieren atención médica?
7. En una huerta de 5 300 naranjos, se considera una muestra al azar de 600. Y se encuentra que en esa muestra hay 450 naranjos dañados por hongos. ¿Aproximadamente cuántos de los 5 300 naranjos de la huerta están dañados por hongos?
8. Haciendo un análisis de 80 000 accidentes automovilísticos, se toma una muestra al azar de 500 y se encuentra que, de esa muestra, 460 accidentes son leves y ocasionan pérdidas menores a los mil pesos. ¿Aproximadamente cuántos de los 80000 accidentes ocasionan pérdidas de menos de $1000.00?
9. En una población norteamericana de 2 500 habitantes, un psicólogo toma al azar una muestra de 300 personas y observa que 175 de ellas tienen un coeficiente intelectual superior a 80. ¿Probablemente cuántos habitantes de la población tienen un coeficiente intelectual de más de 80?

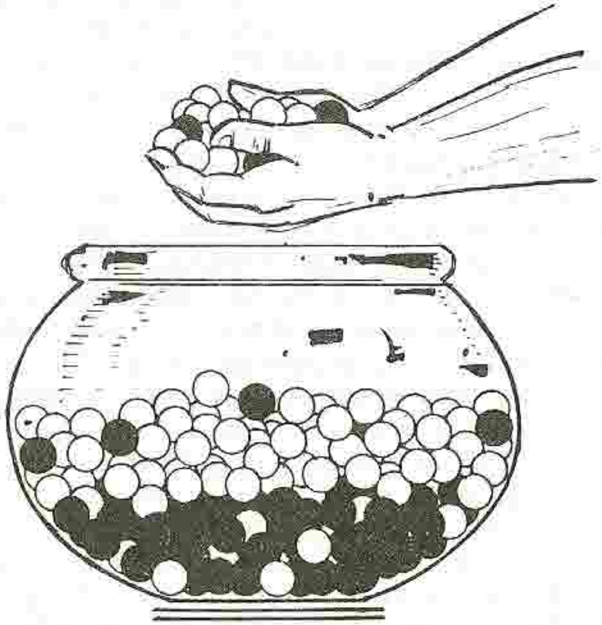
10. En un terreno de 3 000 m² se eligen al azar 200 m² como muestra y, al examinarlos, se observa que en 170 de ellos hay carencia de nitrógeno. ¿Probablemente en cuántos de los 3 000 m² de terreno hay carencia de nitrógeno?

En los ejemplos y problemas anteriores, siempre hemos mencionado que los elementos de la muestra, se toman al azar. Esto, como veremos a continuación, es muy importante, ya que el procedimiento que hemos empleado para inferir un resultado únicamente es válido cuando los elementos de la muestra se toman al azar.

Veamos con algunos ejemplos por qué la muestra debe elegirse al azar.

1. Sabemos que en una urna hay 400 canicas, 200 negras y 200 blancas. Ahora bien, si las canicas se "revuelven" perfectamente y se toma una muestra, ésta fue tomada al azar, ya que al revolver las canicas, cada una de ellas tuvo exactamente la misma oportunidad de ser tomada en la muestra.

Supongamos ahora, en relación a la misma urna, que las canicas no se revuelven y que se toma una muestra, tal como apreciamos en la ilustración.



Esta muestra no fue tomada al azar, ya que no todas las canicas tuvieron exactamente la misma oportunidad de ser elegidas. (Observe usted que la mayoría de las canicas negras están en el fondo de la urna.)

Si quisiéramos saber a partir de esta muestra (17 canicas blancas y 3 negras) cuántas canicas negras hay aproximadamente en la urna, estableceríamos la siguiente proporción:

$$\frac{x}{400} = \frac{3}{20}$$

y al resolverla,

$$x = \frac{400 \times 3}{20} = 60$$

inferiríamos que en la urna hay 60 canicas negras, lo cual, como sabemos, es falso.

2. Se desea saber cuántos de los alumnos de una secundaria estudian en la biblioteca los sábados. El subdirector de la escuela toma como muestra a los alumnos del 3o. "A" y le informan que de los 50 alumnos de ese grupo 35 estudian en la biblioteca los sábados. Como la escuela tiene 1 200 alumnos el subdirector establece y resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{35}{50} = \frac{x}{1\,200}$$

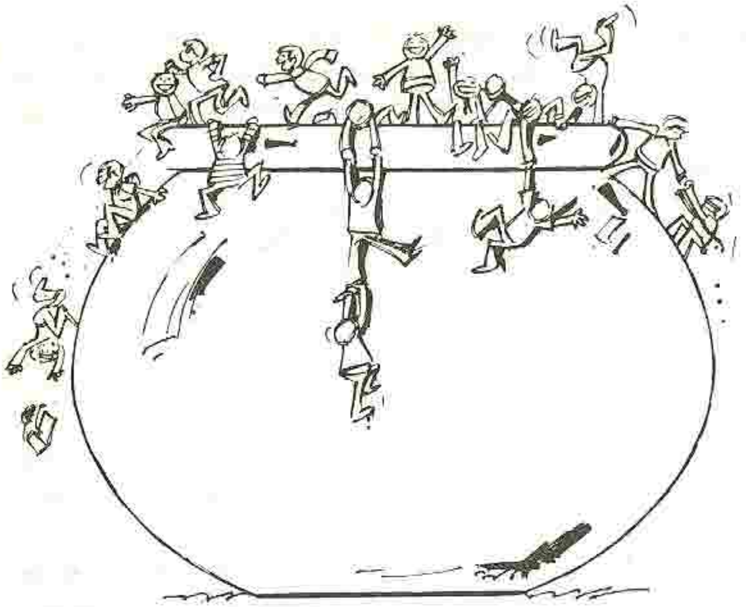
$$x = \frac{35 \times 1\,200}{50} = 840,$$

e infiere que probablemente 840 alumnos acuden a la biblioteca los sábados.

Posteriormente el director de la escuela decide confirmar estos datos. Para ello interroga a todos los alumnos de la escuela y encuentra que únicamente 175 alumnos estudian en la biblioteca los sábados. ¿Qué fue lo que ocurrió?

Sucedió que la muestra elegida por el subdirector no fue tomada al azar, pues, con el método que utilizó, cada uno de los alumnos no tuvo exactamente la misma oportunidad de ser elegido en la muestra.

Para comprender mejor esto, podemos imaginar a todos los alumnos de la escuela dentro de una gran urna y pensar que no estaban suficientemente "revueltos", motivo por el cual la muestra no fue tomada al azar.



Desde luego que para tomar al azar una muestra de 50 alumnos en una escuela secundaria existen procedimientos adecuados, y no es necesario meter a todos los alumnos en una gran urna y revolverlos.

No pretendemos aquí exponer métodos para realizar muestreos; pero sí queremos que usted se dé cuenta que en muchas ocasiones hacemos inferencias incorrectas.

Si meditamos un poco nos damos cuenta que la mayoría de nosotros obtenemos información constantemente a partir de muestras, en forma análoga a como proceden los investigadores. Sin embargo, es conveniente darse cuenta que muchas de estas inferencias son incorrectas, algunas veces porque la muestra no fue tomada al azar y otras porque el número de elementos de la muestra es demasiado pequeño.

Para aclarar un poco lo anterior pensemos en lo siguiente:

Es muy frecuente, sobre todo en la radio y la televisión, oír expresiones como: "7 de cada 10 personas beben refresco de tal marca" o "3 de cada 5 dentistas recomiendan tal dentífrico", etc. Pero, ¿se nos informa en esos anuncios comerciales cómo fueron elegidas las 10 personas o los 5 dentistas? ¿No cree usted que los pudieron considerar en forma tendenciosa? ¿Serán dignas de crédito esas informaciones?

Ejercicio 2 Diga en cada caso si el dato que se infiere es correcto o no, y dé el porqué de su respuesta.

a) De los 25 empleados de una oficina, hay 20 que usan zapatos x. Se infiere que en el país 4 de cada 5 empleados usan zapatos x.

b) Un maestro de biología falta a su clase dos viernes consecutivos. El director comenta que tal maestro falta todos los viernes.

c) Un turista infiere que en cierta ciudad todos los habitantes son descorteses, pues al conversar con tres de ellos notó su gran descortesía.

d) En cierta colonia se visitan 180 hogares y se encuentra que en 90 de esos hogares usan el detergente z. Se infiere que en la mitad de los hogares del Distrito Federal se usa el detergente z.

e) Durante un concurso de popularidad, de 200 cartas que llegan a la estación radiodifusora hay 150 que favorecen la melodía k. Se declara que el 75% de los radioescuchas en el país votan por la melodía k.

f) De 5 000 consultas médicas se toma al azar una muestra de 250 y se encuentra que en 100 de ellas el diagnóstico fue: trastornos de las vías respiratorias. Se infiere que en el 40% de todas esas 5 000 consultas médicas se diagnosticó: trastornos de las vías respiratorias.

g) En dos ocasiones que usted se entrevista con una persona observa que lleva el calzado sucio. Usted infiere que tal persona siempre lleva el calzado sucio.

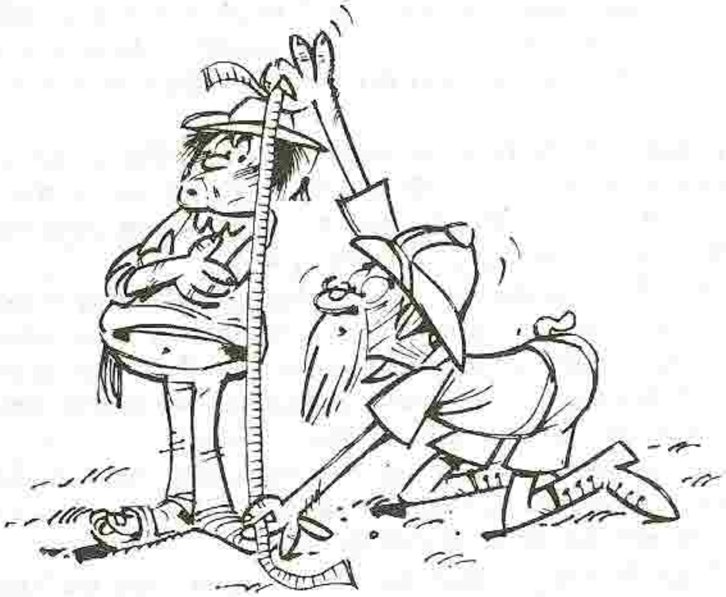
h) De las 90 000 personas que visitan anualmente un museo, se toma al azar una muestra de 400 personas y se encuentra que 150 son extranjeras. Se infiere que de las 90 000 personas 45 000 son extranjeras.

i) De un lote de 5 000 televisores, se extrae al azar una muestra de 400 y resulta que 300 están defectuosos. Se infiere que el 80% de los 5 000 televisores está defectuoso.

j) Un aficionado al fútbol ve por T. V., únicamente tres de todos los partidos de la temporada. En ellos observa la mala actuación de un jugador e infiere que éste siempre juega mal.

2. PARAMETROS ESTADISTICOS

En muchos de los estudios que realizan los antropólogos frecuentemente deben establecerse comparaciones. Por ejemplo, el antropólogo Ramírez se ha dado cuenta que los habitantes de Taracho casi no consumen alimentos ricos en proteínas, mientras que la alimentación de los habitantes de Sirácuaro es a base de proteínas. Ramírez piensa que este factor necesariamente debe influir en el estado físico de las personas y, en particular, en la estatura. El cree que los habitantes de Sirácuaro son en general más altos que los habitantes de Taracho; pero desea estar seguro y quiere, además, cuantificar la diferencia.



¿Cómo puede el antropólogo comparar las estaturas de los habitantes de estos poblados?

Una forma de hacerlo consiste en medir la estatura de todos los habitantes en los dos poblados, después obtener la media aritmética (promedio) de las estaturas correspondientes a cada poblado, y, finalmente, comparar las medias aritméticas así obtenidas.

Pero esta forma de hacerlo requiere mucho tiempo y mucho dinero. Ramírez decide aplicar en este caso sus conocimientos de Estadística. Así que de cada poblado toma al azar a algunas personas y mide la estatura de ellas, obtiene la media aritmética de las estaturas en cada muestra y, finalmente, compara estas medias aritméticas.

(Seguramente usted recuerda que para obtener la media aritmética de varios datos numéricos, primero se suman éstos y luego se divide la suma entre el número de datos.)

Ejercicio 3

a) Obtenga la media aritmética de los datos de la siguiente muestra, tomada en Taracho:

136	142	153	154	163	189	195
158	149	141	130	140	141	145
156	176	165	167	157	146	137
138	150	152	162	161	189	178
132	135	136	139	137	143	141
149	157	178	149	140	149	154
164	156	175				

b) Obtenga la media aritmética de los datos de esta otra muestra tomada de Sirácuaro.

151	195	143	169	180	144	158
131	159	143	151	176	154	180
182	157	168	153	168	157	165
145	158	179	183	162	165	161
178	172	176	145	168	132	188
171	173	164	161	183	197	146
158	138	160	149	189	171	169
169						

Una vez conocidas las medias aritméticas anteriores, el antropólogo, o cualquier otra persona puede decir en cuál de los dos poblados los habitantes tienen mayor estatura. Dígalo usted.

En general, la media aritmética es el parámetro que más frecuentemente se usa en estadística. Sin embargo, existen otros parámetros estadísticos como la mediana y la moda que, como veremos posteriormente, tienen a veces importantes aplicaciones.

Volviendo al ejemplo del antropólogo, ilustraremos cómo se obtiene la mediana de un conjunto de datos.

Las estaturas correspondientes a la muestra tomada en Taracho son:

136	142	153	154	163	189	195
158	149	141	130	140	141	145
156	176	165	167	157	146	137
138	150	152	162	161	189	178
132	135	136	139	137	143	141
149	157	178	149	140	149	154
164	156	175				

Lo primero que hacemos es ordenar los datos de menor a mayor. Esto es,

130	132	135	136	136	137	137
138	139	140	140	141	141	141
142	143	145	146	149	149	149
149	150	152	153	154	154	156
156	157	157	158	161	162	163
164	165	167	175	176	178	178
189	189	195				

Si el número de datos es impar, el número que queda exactamente a la mitad de la lista es la mediana. En este caso la mediana es 150.

Cuando el número de datos es par, la mediana es la media aritmética de los dos datos que quedan a la mitad de la lista.

Por lo que respecta a la moda, simplemente es el dato que aparece con mayor frecuencia. Así, en el ejemplo que nos ocupa la moda es 149.

Ejercicio.

Obtenga la mediana y la moda de los datos de la muestra tomada en Sirácuaro.

Ejercicio 4. Haga lo que se indica en cada inciso.

a) Al terminar su primer año de secundaria, un alumno obtuvo las siguientes calificaciones:

8 9 6 5 4 7 5 10 y 6.

¿Cuál es la media aritmética de ellas?

b) El consumo de energía eléctrica en cierto taller, durante una semana, fue de:

17 42 28 70 19 35 y 20

kilovatios-hora. ¿Cuál fue en promedio el consumo diario durante esa semana?

c) En un equipo de voleibol las estaturas de sus 9 jugadores son:

175 180 190 195 187 190 190 175

y 192. ¿Cuántos jugadores miden menos de 1.92? ¿Cuál es la estatura promedio? ¿Cuál es la estatura que más se repite? Es decir, ¿cuál es la moda?

d) Las edades de las 8 secretarias de una oficina son:

24 23 26 26 23 36 35 y 26 años.

Encuentre la media, la mediana y la moda de esos datos.

e) Sabemos que 5 es la media aritmética de los siguientes datos:

3 4 x 7 y 3.

¿Cuál es el valor de x?

f) Si x es la media aritmética de los siguientes datos,

8 5 6 x 8 3 x,

¿Cuál es el valor de x?

g) Los pesos (en kilogramos) de 8 personas en un equipo de 9 jugadores son, respectivamente,

80 83 78 79 71 70 83 y 81.

Si la moda tiene una frecuencia de 3, ¿cuál es la media y cuál es la mediana de los pesos de los 9 jugadores?

3. DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS

El antropólogo Ramírez piensa que los datos obtenidos en las poblaciones de Taracho y Sirácuaro pueden proporcionarle una mayor información. El sabe que cuando una persona dispone de un conjunto de datos, generalmente puede apreciarlos mejor si los clasifica y, mejor aún, si los representa gráficamente.

Es por eso que, una vez ordenados los datos correspondientes a Taracho,

130 132 135 136 136 137 137
138 139 140 140 141 141 141
142 143 145 146 149 149 149
149 150 152 153 154 154 156
156 157 157 158 161 162 163
164 165 167 175 176 178 178
189 189 195.

Procede a clasificarlos observando cuántos están comprendidos entre 130 y 140, cuántos están comprendidos entre 141 y 150, etc. Y los dispone en una tabla como la siguiente:

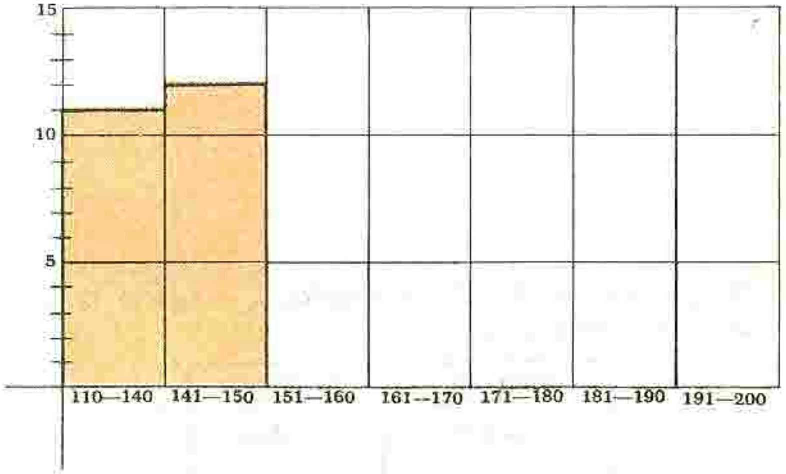
Intervalo	Frecuencia
130–140	11
141–150	12
151–160	
161–170	
171–180	
181–190	
191–200	

(Recuerde usted que tablas como ésta reciben el nombre de *Tablas de frecuencia.*)

Observe que hay *11* datos entre *130* y *140* inclusive. Por eso se anota el 11 a continuación del intervalo *130-140*. Hay *12* datos entre *141* y *150*, inclusive. Por eso se escribe *12* a continuación del intervalo *141-150*.

Ejercicio 5. Complete la tabla anterior.

Ejercicio 6. Con los datos de la tabla anterior complete el siguiente diagrama de frecuencias.



Ejercicio 7. De acuerdo con el diagrama anterior conteste las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántas personas tienen una estatura mayor de *150?*
b) ¿Cuántas personas tienen una estatura menor de *140?*
c) ¿Cuántas personas tienen una estatura menor de *181* y mayor de *170?*
d) ¿Cuántas personas tienen una estatura mayor de *160* y una menor de *191?*
e) ¿Cuántas personas tienen una estatura entre *141* y *190*, inclusive?

Los siguientes datos son las estaturas en centímetros de las personas tomadas como muestra en Sirácuaro:

151 195 143 169 180 144 158
131 159 143 151 176 154 180
182 157 168 153 168 157 165
145 158 179 183 162 165 161
178 172 176 145 168 132 188
171 173 164 161 183 197 146
158 138 160 149 189 171 169
169

Ejercicio 8.

a) Ordene los datos anteriores de menor a mayor.

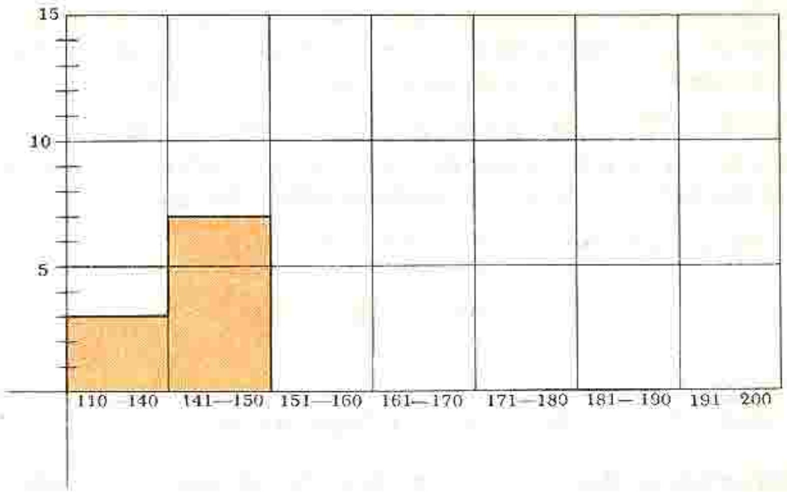
b) De acuerdo con los datos anteriores, complete la siguiente tabla de frecuencias:

Intervalo	Frecuencia
110–140	3
141–150	7
151–160	
161–170	
171–180	
181–190	
191–200	

c) Con los datos de la tabla anterior, complete el siguiente diagrama de frecuencias.

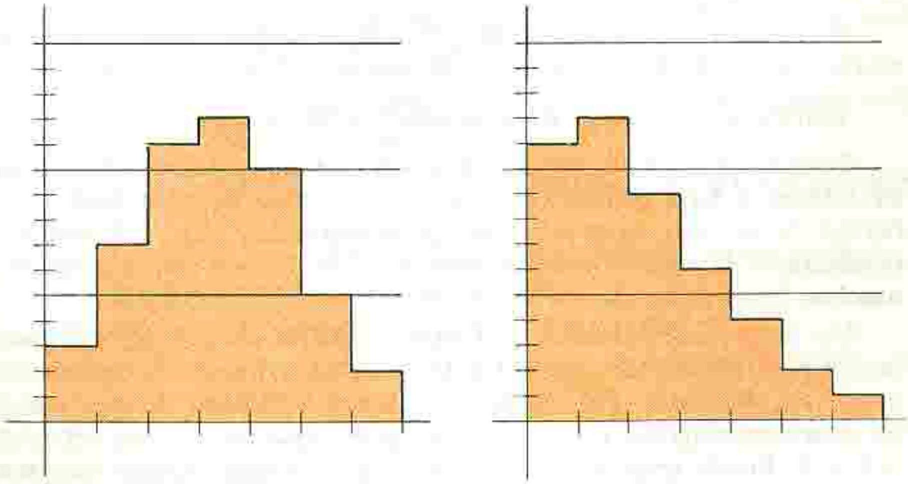
Ejercicio 9. Tomando en cuenta los datos representados en el diagrama anterior conteste las siguientes preguntas:

a) ¿Hay alguna persona con una estatura mayor de *170*?
b) ¿Cuántas personas hay con una estatura menor de *150*?
c) ¿Hay personas con una estatura mayor de *160* y menor de *150*?



d) ¿Cuántas personas son mayores de *140* y menores de *151*?
e) ¿Cuántas personas tienen una estatura entre *171* y *200*?

Ramírez observa los diagramas de frecuencias correspondientes a las dos muestras,



e inmediatamente se da cuenta que el de la izquierda es más o menos simétrico y corresponde a una distribución normal. En cambio, el de la derecha presenta una asimetría notable.

Momentáneamente, este hecho lo preocupa y quiere conocer la causa; pero rápidamente recuerda que un gran porcentaje de la población de Sirácuaro es menor de 10 años, es decir, que hay muchas personas con una estatura entre 110 y 140 cm, y que ésta es precisamente la causa de la asimetría.

Ejercicio 10. Compare entre sí la media, mediana y la moda correspondientes a los datos de Taracho; y compare entre sí la media, la mediana y la moda correspondientes a los datos de Sirácuaro.

Comente sus observaciones con el maestro.

4. PROBABILIDAD

Iniciaremos este tema con un breve repaso de las ideas básicas de probabilidad estudiadas en el primer grado.

Experimentos determinísticos y experimentos aleatorios

Un experimento determinístico es aquel en que podemos predecir el resultado porque sabemos que todas las veces que efectuemos tal experimento obtendremos el mismo resultado. Por ejemplo, si ponemos al fuego un recipiente con agua, después de cierto tiempo el agua hervirá.

Si en las mismas condiciones repetimos varias veces el experimento, el resultado será siempre el mismo: el agua hervirá.

Veamos otro ejemplo de experimento determinístico:

Cuando se disuelve bióxido de azufre en agua, en determinadas cantidades y bajo ciertas condiciones, se forma siempre ácido sulfuroso. Y siempre que se repite el experimento bajo las mismas condiciones el resultado es el mismo. (De no ser así, no habría muchos fabricantes de ese producto.)

Un fenómeno aleatorio, o al azar, es aquel en que no podemos predecir el resultado, pues al repetir el experimento el resultado puede ser diferente. Por ejemplo, al lanzar un dado de seis caras no podemos asegurar que el número que quede en la cara superior sea el 4. Puede ocurrir que sea así, o bien, puede ocurrir que sea alguno de los números 1, 2, 3, 5, o 6.

Otros ejemplos de situaciones al azar son:

1. Barajar un mazo de cartas y después extraer una. No se puede asegurar que siempre que hagamos esto saldrá el as de espadas, por ejemplo.

2. En una clínica de maternidad pesar a los recién nacidos. No se puede predecir cuál será el peso de cada bebé.

3. Registrar las llamadas telefónicas durante un día, en cierto lugar. No se puede predecir cuántas llamadas habrá.

4. Anotar las marcas de 10 vehículos que pasen por una caseta de cobro. No se puede predecir de qué marca o marcas serán esos 10 vehículos.

5. Contar el número de personas que asisten a una función de cine. No se puede predecir cuántas personas serán.

El espacio muestra

Generalmente en un experimento al azar podemos señalar los resultados posibles. Así, por ejemplo, en el experimento de lanzar un dado, el conjunto de resultados posibles es {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Al conjunto de resultados posibles en un experimento al azar lo llamaremos espacio muestra.

Si se trata del experimento de extraer una carta de un mazo de 52, entonces el espacio muestra son las 52 cartas, ya que cada carta es un resultado posible.

Con respecto al experimento de lanzar una moneda, resulta claro que el espacio muestra es {águila, sol}.

Ejercicio 11. En cada uno de los siguientes experimentos indique cuál es el espacio muestra.

a) Se le pregunta a una persona distinta cada vez, en qué mes del año nació.
b) Se extrae una carta de una baraja española (40 cartas).
c) Se rifa un radio entre 25 personas.
d) Se anota la primera letra de 100 palabras.
e) Se juega a la lotería. El premio es de $5 000 000 y la emisión es de 40 000 billetes.
f) Se le pregunta en el D. F., a una persona diferente cada vez, qué estación de radio escucha.
g) Se lanzan dos monedas, una de $1.00 y la otra de $0.50, para ver si caen en águila o sol, una o ambas.
h) De 14 fichas de dominó usted extrae una.
i) Se extrae una carta de una baraja inglesa (52 cartas).
j) Se hace girar una perinola de 6 caras laterales.

En la teoría de la probabilidad, cuando hablamos de un experimento al azar, idealizamos un poco las cosas.

Por ejemplo, en el caso de lanzar una moneda al aire excluimos como resultado posible el que la moneda caiga de canto, ya que esto es "casi imposible" que suceda; pero, como sobemos, llega a darse el caso.

En el caso de lanzar un dado de seis caras suponemos que no está "cargado"; de manera que cada uno de los 6 números tiene exactamente la misma oportunidad de quedar en la parte superior. Suponemos también que la persona que lanza el dado no tiene ninguna habilidad que diera a algún número más oportunidad que a otros.

Probabilidad de un evento

Antes de explicar lo que es la probabilidad de un evento, es necesario que precisemos primero lo que es un evento.

Si consideramos un experimento al azar y su correspondiente espacio muestra, entonces un evento es subconjunto del espacio muestra. (Recuerde que un subconjunto puede no tener elementos, o tener uno, dos o más elementos.)

Para aclarar lo anterior veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1. En el experimento al azar de extraer una carta de una baraja inglesa, un evento es "sacar un rey". (Observe que este evento tiene únicamente 4 elementos, pues en la baraja hay 4 reyes.) Otro evento es "sacar un trébol". (Este evento tiene 13 elementos, pues hay 13 cartas en la baraja que son de tréboles.)

Ejemplo 2. En el experimento de lanzar un dado de seis caras, un evento es "sacar un número impar". (Este evento tiene 3 elementos que son los números 1, 3, 5.) Otro evento es "tirar un seis". (Este evento tiene un solo elemento, pues en las caras del dado sólo hay un seis.)

Ejemplo 3. Al sacar una carta al azar de una baraja española, el evento "sacar un nueve", no tiene elementos, pues en la baraja española no hay nueves.

Si un evento no tiene elementos, lo llamaremos evento imposible.

Ejercicio 12. De acuerdo con el experimento ,en cada inciso indique cuántos elementos tiene el evento.

Se tira un dado de seis caras.

a) "Sacar un número par".
b) "Sacar un número mayor que 5".
c) "Sacar un número menor que 3".
d) "Sacar un número mayor que 6".
e) "Sacar un 4".

En una bolsa hay 20 canicas azules, 10 amarillas y 5 rojas. Sin ver, se saca una canica de la bolsa.

f) "Sacar una canica amarilla".
g) "Sacar una canica azul".
h) "Sacar una canica que no sea roja".
i) "Sacar una canica que no sea azul".
j) "Sacar una canica verde".

De una baraja inglesa se extrae al azar una carta.

k) "Sacar un corazón".
l) "Sacar una carta roja".
m) "Sacar una carta que no sea as".
n) "Sacar un diamante".
o) "No sacar un diamante".

Se lanzan dos monedas, una de $1.00 y otra de $0.50.

p) "Sacar dos águilas".
q) "Sacar dos soles".
r) "Sacar un águila y un sol".
s) "Sacar al menos un águila".
t) "Sacar al menos un sol".

Daremos ahora la siguiente definición:

> Con respecto a un experimento al azar, la probabilidad de un evento es el cociente del número de elementos del evento entre el número de elementos del espacio muestra.

Si consideramos a los elementos de un evento como resultados favorables, entonces la definición anterior puede expresarse así:

> Con respecto a un experimento al azar, la probabilidad de un evento es el cociente del número de resultados favorables entre el número de resultados posibles.

Ejercicio 13. En cada caso indique la probabilidad del evento.

- a) Se extrae una carta al azar de una baraja inglesa. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una reina?
- b) De una urna con 10 canicas blancas y 5 negras se extrae una. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una canica blanca?
- c) Se lanza un dado de seis caras. ¿Cuál es la probabilidad de no sacar un 5?
- d) ¿Cuál es la probabilidad de ganar en la rifa de un reloj? Si hay 30 números y se compran 3 números.
- e) ¿Cuál es la probabilidad de sacarse la lotería con un billete, en un sorteo cuya emisión es de 100 000 billetes?
- f) De una urna con 15 canicas verdes y 10 amarillas se extrae una. ¿Cuál es la probabilidad de no sacar una canica amarilla?
- g) ¿Cuál es la probabilidad de sacar "copas" al extraer una carta de una baraja española?
- h) Se lanza un dado de 6 caras. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número mayor o igual a 3?
- i) De las 28 fichas de dominó se extrae una. ¿Cuál es la probabilidad de obtener la doble de seises?
- j) En un cuestionario una pregunta de opción tiene 3 posibles respuestas. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte casualmente a la pregunta?

En el siglo XVII el llamado "filósofo jugador", Chevalier de Meré, escribió al matemático Blas Pascal solicitándole algunos informes sobre el juego de dados. A su vez, Pascal escribió al matemático Pierre de Fermat con un asunto semejante. En la correspondencia que así se estableció tuvo sus inicios la teoría de la probabilidad.


Pierre de Fermat

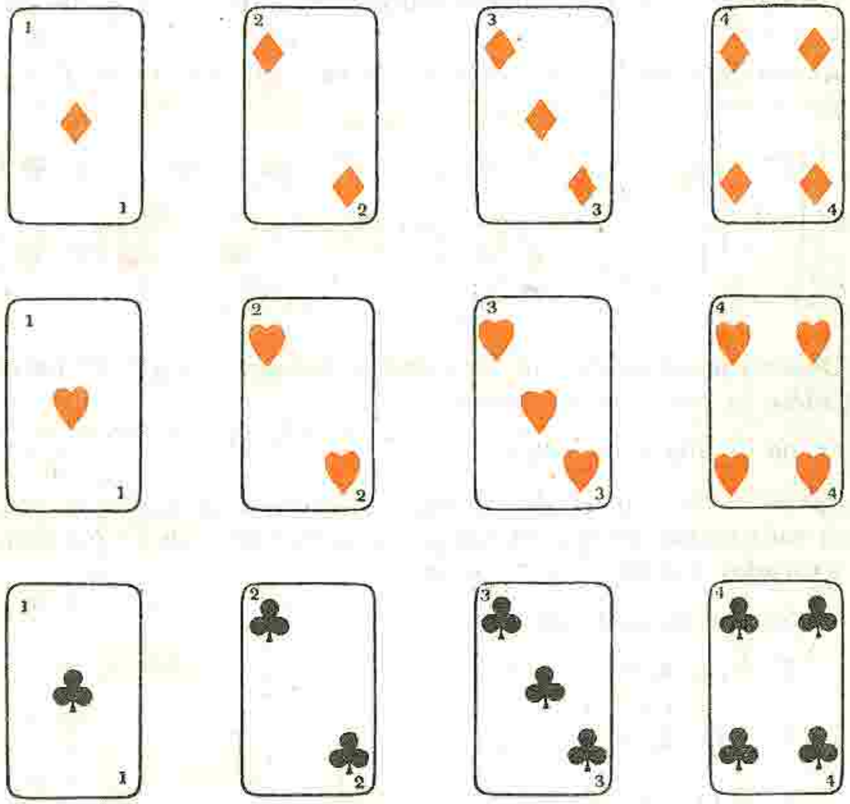

Blaise Pascal

Posiblemente a causa de su origen la teoría de la probabilidad se asocia demasiado con juegos de dados, rifas, naipes, urnas, ruletas, etc.; y casi nunca pensamos en sus múltiples e importantes aplicaciones en campos como la economía, la genética, la física, la comunicación, la publicidad, etc.

Ahora que hemos realizado un breve repaso de los conocimientos básicos de probabilidad, iniciaremos el estudio de algunos temas nuevos.

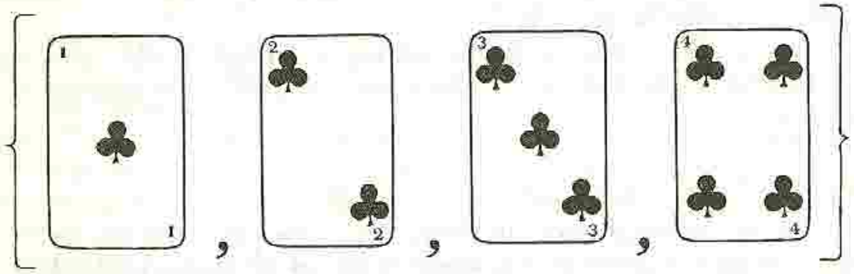
Probabilidad del complemento de un evento

Consideremos el experimento al azar que consiste en sacar una carta de un conjunto de 12, como el que se ilustra a continuación.



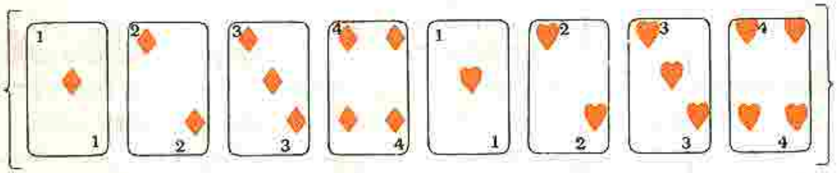
Cada una de estas cartas es un resultado posible del experimento, de manera que el conjunto ilustrado es un espacio muestra al que llamamos S.

Como usted puede apreciar, la proposición abierta: "x es una carta negra" determina un evento de S, si llamamos E a este evento tenemos que:

$E =$


Formemos ahora un conjunto con los elementos de S que no pertenecen a E.

Al conjunto así formado lo llamaremos complemento de E, y lo representaremos con E'. Así que

$E' =$


Observe usted ahora que cada uno de los elementos de E' hacen verdadera la proposición abierta:

"x no es una carta negra"

Ejercicio 14. En relación al experimento al azar que se menciona en cada inciso, obtenga el complemento de cada uno de los eventos indicados, tal como se hace en a).

a) Se tira un dado de 6 caras.

$E = \{2, 4, 6\}$

$E' = \{1, 2, 3\}$

$F = \{1, 2\}$

$F' =$

$G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$G' =$

b) De las 7 fichas "dobles" de un dominó se extrae una.

$H = \{$  $\}$

$H' =$

$J = \{$  ,  $\}$

$J' =$

c) De los 7 días de la semana se elige uno.

K = {lunes, viernes}

$K' =$

L = {domingo}

$L' =$

M = {sábado, martes, miércoles, lunes}

$M' =$

d) Se lanza una moneda al aire

N = {águila}

$N' =$

P = {sol}

$P' =$

Q = {águila, sol}

$Q' =$

e) En una bolsa hay una canica roja, una azul, una amarilla, una blanca, una negra y una verde, sin ver, se saca una.

$R = \{\text{azul, amarilla}\}$

$R' =$

$S = \{\text{roja}\}$

$S' =$

$T = \{\text{negra, blanca, verde}\}$

$T' =$

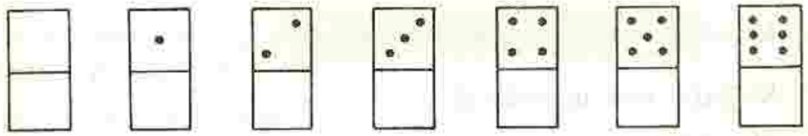
Ejercicio 15. En relación al experimento al azar mencionado en cada inciso, obtenga la probabilidad del complemento del evento indicado.

a) Se tira un dado de seis caras.

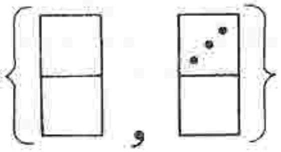
$E = \{2, 4, 6\}$

$P(E') =$

b) Del siguiente conjunto de fichas se extrae una.



$E =$



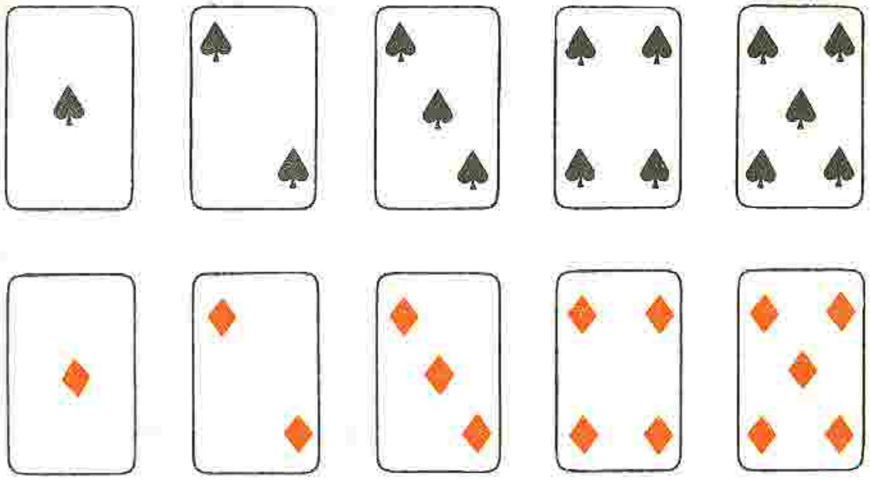
$P(E') =$

c) De una urna con 5 canicas blancas y 7 canicas grises se extrae una.

Evento E: "x es una canica gris"

$P(E') =$

d) Del siguiente conjunto de cartas se extrae una.



Evento E: "x es un cinco"

$P(E') =$

e) De una urna con 10 canicas blancas, 6 canicas negras y 4 rojas se extrae una sin ver.

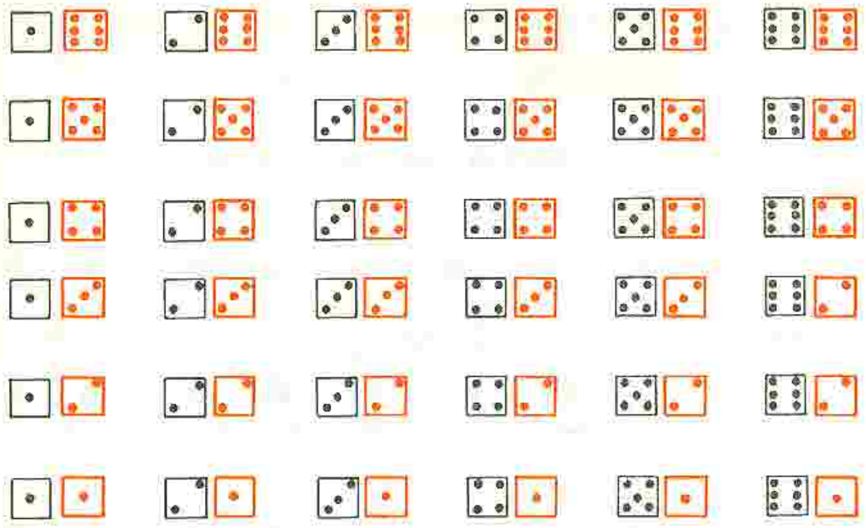
Evento E: "x es una canica negra"

$P(E') =$

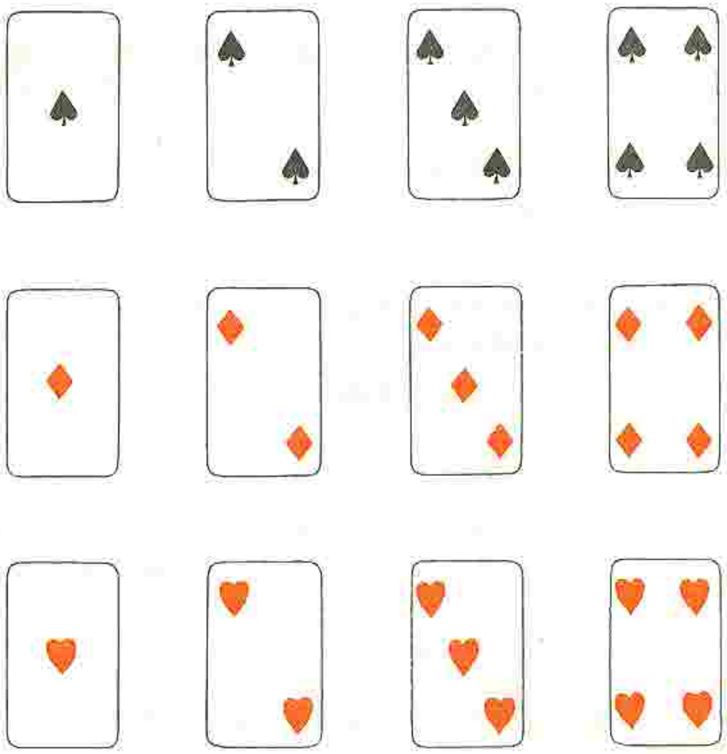
f) Se lanzan dos dados de 6 caras. Se considera a x como la suma de los puntos que aparecen en las caras superiores de los lados.

Evento E: "x es mayor que 7"

$P(E') =$ (use el siguiente diagrama)



g) Del siguiente conjunto de cartas se extrae una.



Evento E: "x es un as"

$P(E') =$

Seguramente usted, para obtener en el inciso g) anterior la probabilidad $P(E')$, contó los 9 casos favorables (cartas que no son ases), y dividió este número entre 12 obteniendo así el número de casos posibles $(\frac{9}{12})$.

Ahora bien, observe usted que este cociente $\frac{9}{12}$, también puede obtenerse restando a 1 la probabilidad de E. Esto es:

$$P(E) = \frac{3}{12}$$

$$P(E') = 1 - \frac{3}{12}$$

$$P(E') = \frac{12}{12} - \frac{3}{12} = \frac{9}{12}$$

Ejercicio 16. En cada uno de los incisos del ejercicio anterior obtenga la probabilidad del complemento de E, restando a 1 la probabilidad de E. Compare sus resultados con los obtenidos anteriormente.

En general, con respecto a un experimento al azar, si E es un evento cualquiera y E' es su complemento, entonces:

$$P(E') = 1 - P(E)$$

Este resultado a veces permite obtener la probabilidad de un evento de una manera más simple. Ejemplo:

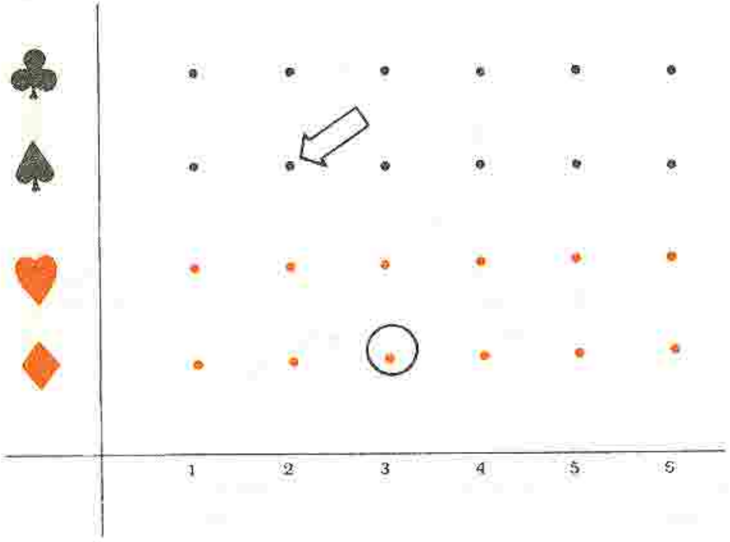
Sabemos que en una escuela secundaria hay 950 alumnos. Deseamos saber, al elegir un alumno al azar, cuál es la probabilidad del evento "x es mexicano". Podemos fácilmente contar los alumnos que no son mexicanos (en este caso 3) y obtener la probabilidad del evento "*x* no es mexicano". Esta probabilidad es $\frac{3}{950}$. Ahora restamos a 1 este resultado y obtenemos

$$1 - \frac{3}{950} = \frac{950}{950} - \frac{3}{950} = \frac{947}{950},$$

que es la probabilidad del evento "*x* es mexicano".

A fin de facilitar el trabajo en los temas que tratemos de aquí en adelante, en lugar de ilustrar los elementos de un espacio muestra, emplearemos algunos diagramas como los siguientes.

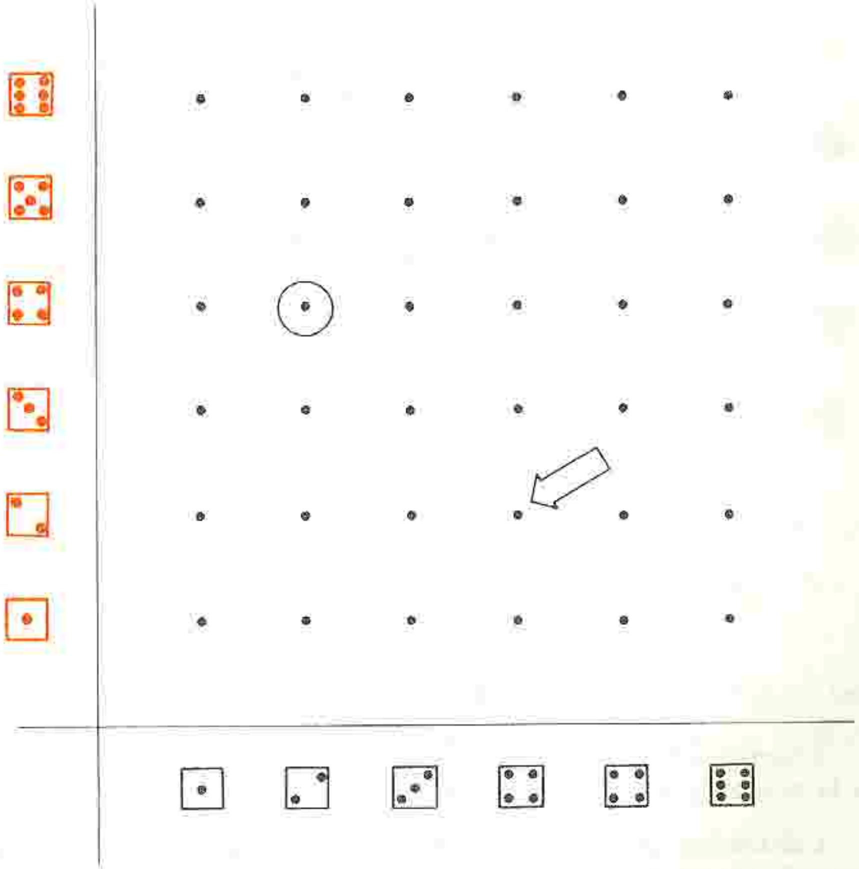
a)



En este diagrama se representa un espacio muestra de 24 cartas por medio de 24 puntos. Así, por ejemplo, el punto que señala la flecha representa la carta *dos de espadas* y el punto encerrado en un círculo representa la carta *tres de diamantes*.

En el siguiente diagrama cada uno de los 36 puntos representa un posible resultado al lanzar dos dados, uno blanco y otro de color. En particular, el punto encerrado en un círculo representa el resultado en el cual el dado blanco cae en 2 y el dado de color cae en 4. El punto señalado con una flecha representa el resultado en el cual el dado blanco cae en 4 y el dado de color cae en 2.

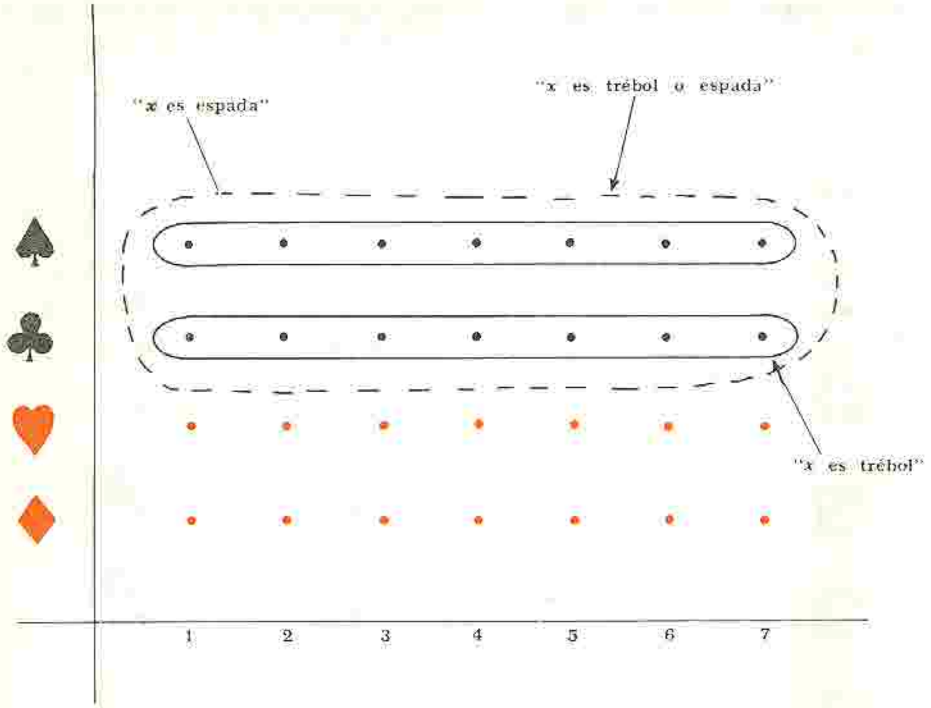
b)



Unión de eventos

Un evento, ya lo hemos dicho antes, es un conjunto. Así que cuando hablamos de unión de eventos nos estamos refiriendo a una unión de conjuntos. Es por eso que podemos utilizar todos nuestros conocimientos sobre unión de conjuntos al estudiar la unión de eventos. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo. En el experimento de extraer una carta al azar de un conjunto de 28, consideremos los eventos "*x* es trébol" y "*x* es espada", la unión de estos eventos es el evento "*x* es trébol o espada". Esto puede apreciarse mejor en el siguiente diagrama:

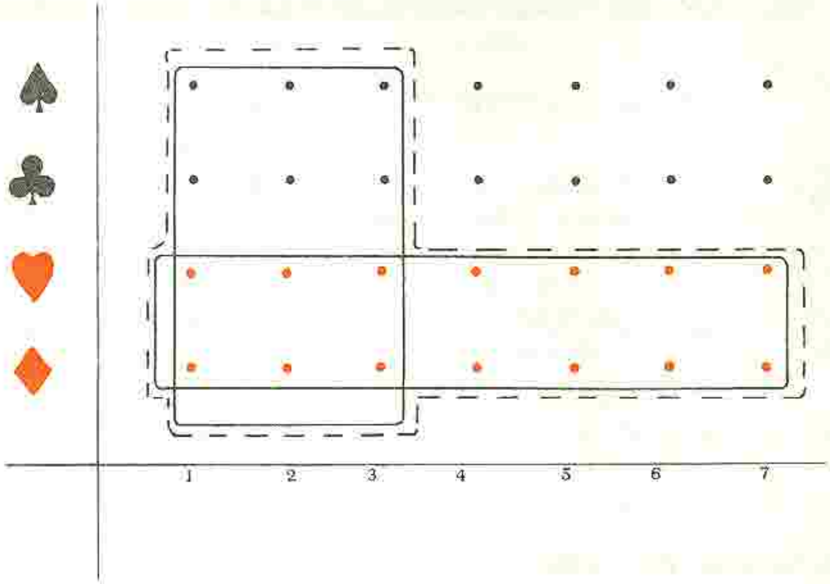


Nota. En la baraja inglesa la figura ♠ se denomina espada.

Observe usted que en la expresión que usamos para referirnos a la unión de los eventos empleados la letra "O".

Calculemos ahora la probabilidad del evento "x es trébol o diamante", en el diagrama apreciamos que los casos favorables son 14 y los casos posibles son 28. Así que la probabilidad de este evento unión es $\frac{14}{28}$

En el caso anterior los eventos que unimos no tienen elementos comunes; pero algunas veces los eventos que unimos sí tienen elementos en común. Por ejemplo, en relación al experimento anterior consideremos los eventos "x es carta roja" y "x es menor que 4". La unión de estos eventos es el evento "x es carta roja o menor que 4", y en el diagrama apreciamos claramente los elementos comunes de estos eventos.

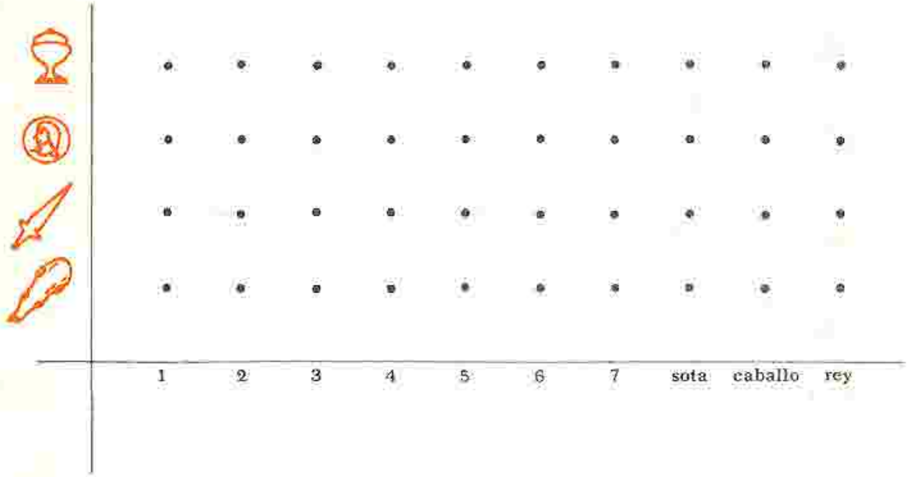


Como usted puede observar, la probabilidad del evento "x es carta roja o menor que 4" es $\frac{20}{28}$, pues son 20 los casos favorables y 28 los casos posibles.

Ejercicio 17. En relación al experimento de extraer una carta al azar de una baraja española (40 cartas), encuentre la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:

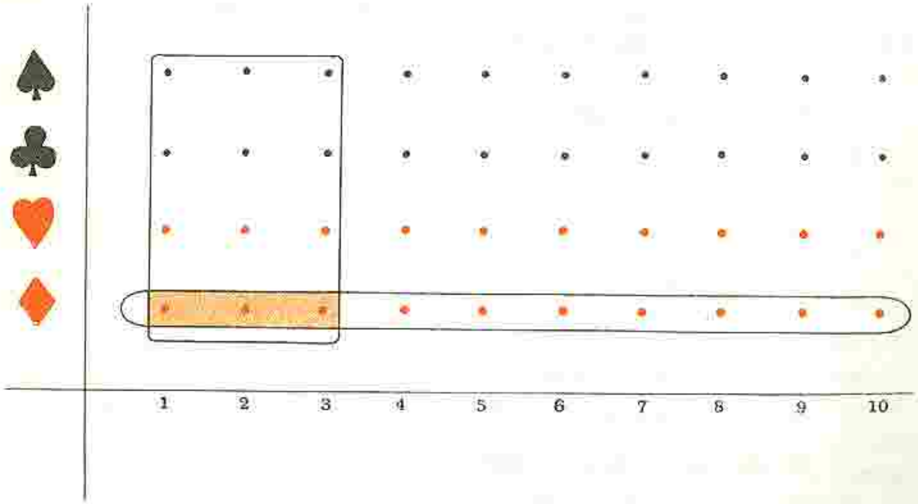
a) "x es copas o espadas"
b) "x es 3 o 7"
c) "x es oros o 6"
d) "x es 2 o copas"
e) "x es 4 o 5"
f) "x no es copas o es 5"
g) "x es 7 o no es bastos"
h) "x no es espadas o es 4"
i) "x es oros o no es copas"
j) "x no es 5 o no es 6"

Sugerencia: Ilustre cada caso con un diagrama como el siguiente:



Intersección de eventos

Ya que los eventos son conjuntos, la intersección de dos eventos se forma con los elementos comunes a ambos eventos. Así por ejemplo, en el experimento de sacar una carta al azar del conjunto que se ilustra en el diagrama, la intersección de los eventos "x es menor que 4" y "x es diamante" es el evento "x es menor que 4 y es diamante". Esta intersección tiene 3 elementos como puede usted apreciar.



Observe que en la expresión que usamos para referirnos a la intersección de los eventos usamos la letra "y". La probabilidad del evento "x es menor que 4 y es diamante" es $\frac{3}{40}$, pues los casos favorables son 3 y los casos posibles 40.

En relación al experimento al azar anterior, ¿cuál es la probabilidad del evento "x es corazón y trébol"?. Como los eventos "x es corazón y "x es trébol" no tienen elementos en común, entonces tenemos cero casos favorables. Por lo tanto, la probabilidad del evento "x es corazón y trébol" es cero; es decir, se trata de un evento imposible. Esto resulta claro pues ninguna carta puede ser corazón y trébol a la vez.

Ejercicio 18. Considere el experimento de sacar una carta al azar de la baraja inglesa y encuentre la probabilidad en cada caso.

a) "x es rey y carta roja"
b) "x es 9 y carta negra"
c) "x es reina y trébol"
d) "x es 10 y rey"
e) "x es carta negra y roja"
f) "x es menor que 8 y carta negra"
g) "x es carta roja y mayor que 10"
h) "x no es carta negra y es menor que 7"
i) "x no es mayor que 5 y es diamante"
j) "x no es trébol y no es mayor que 8"

En los ejercicios anteriores usted pudo apreciar que la probabilidad de la unión de dos eventos sin elementos comunes, puede obtenerse sumando las probabilidades de cada uno de esos eventos.

Ejemplo. Al tirar un dado de seis caras la probabilidad de "x es 1" es $\frac{1}{6}$ y la probabilidad de "x es 2" es $\frac{1}{6}$. ¿Cuál es la probabilidad de "x es 1 o 2"?

Respuesta. La probabilidad de "x es 1 o 2" es $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$ o sea $\frac{1}{3}$

Ejercicio 19. En cada inciso encuentre la probabilidad que se pide. Los eventos cuya probabilidad esté dada no tienen elementos en común.

a) Al extraer una carta de un mazo, la probabilidad de "x es corazón" es $\frac{1}{4}$ y la probabilidad de "x es espada" es $\frac{1}{4}$. ¿Cuál es la probabilidad de "x es corazón o espada?".

b) La probabilidad de que el Sr. Tello sea jefe de su Departamento es de $\frac{2}{5}$ y la probabilidad de que el Sr. Morelos sea jefe del mismo departamento es de $\frac{1}{8}$. ¿Cuál es la probabilidad de que el jefe del departamento sea el Sr. Tello o el Sr. Morelos?

c) Al extraer una canica de una urna la probabilidad de "x es canica blanca" es $\frac{1}{2}$ y la probabilidad de "x es canica amarilla es $\frac{2}{9}$. ¿Cuál es la probabilidad de "x es canica blanca o amarilla?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que una casa sea robada o se incendie? (Se sabe que la probabilidad de que esa casa se incendie es $\frac{1}{100\ 000}$ y la probabilidad de que sea robada $\frac{1}{10\ 000}$.)

e) La probabilidad de que una persona venda una aspiradora es $\frac{2}{7}$ y la probabilidad de que venda una pulidora es $\frac{1}{5}$. ¿Cuál es la probabilidad de que esa persona venda una pulidora o una aspiradora.

Probabilidad de la unión de dos eventos con elementos comunes

En algunos diagramas como el del ejercicio usted pudo apreciar que la probabilidad de la unión de eventos con elementos comunes se puede calcular sumando la probabilidad de cada uno de esos eventos y luego restando la probabilidad de su intersección.

Ejemplo. En una urna hay canicas de dos tamaños y de varios colores. Al extraer una canica al azar la probabilidad de que sea café es $\frac{2}{3}$, la probabilidad de que sea grande es $\frac{1}{4}$ y la probabilidad de que sea grande y café es $\frac{5}{12}$. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una canica salga grande o café?

Respuesta. La probabilidad de que sea grande o café es $\frac{6}{12}$ porque

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)-\frac{5}{12}=\left(\frac{11}{12}\right)-\frac{5}{12}=\frac{6}{12}$$

En general,

Si tenemos dos eventos A y B, en relación a un experimento al azar, entonces la probabilidad de $A \cup B$ es igual a la probabilidad de A más la probabilidad de B, menos la probabilidad de $A \cap B$. En símbolos,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Ejercicio 20. En cada inciso encuentre la probabilidad que se pide.

a) Al extraer al azar una carta de un mazo, la probabilidad de "x es reina" es $\frac{1}{13}$ la probabilidad de "x es trébol" es $\frac{1}{4}$ y la probabilidad de "x es reina y trébol es $\frac{1}{52}$. ¿Cuál es la probabilidad de "x es reina o trébol"?

b) En cierto lugar y a determinada hora, la probabilidad de que "llueva" es $\frac{5}{9}$, la probabilidad de que "la temperatura sea mayor de 15°C" es $\frac{2}{9}$ la probabilidad le que "la temperatura sea mayor de 15°C y llueva" es de $\frac{4}{9}$. ¿Cuál es la probabilidad de que "la temperatura sea mayor de 15°C o llueva"?

c) En una población, al elegir una persona al azar, la probabilidad de que "sepa leer" es $\frac{2}{7}$, la probabilidad de que "use calzado" es $\frac{1}{3}$ la probabilidad de que "sepa leer y use calzado" es $\frac{4}{21}$. ¿Cuál es la probabilidad de que "use calzado o sepa leer"?

d) Al extraer al azar una canica de una urna, la probabilidad de que sea pequeña y gris es $\frac{3}{20}$, la probabilidad de que sea pequeña es $\frac{1}{5}$ y la probabilidad de que sea gris es $\frac{1}{4}$. ¿Cuál es la probabilidad de que sea pequeña o gris?

e) ¿Cuál es la probabilidad de que un árbol frutal sea dañado por hongos o virus? (Se sabe que la probabilidad de que sea dañado por virus y hongos es de $\frac{3}{28}$ la probabilidad de que sea dañado por virus es de $\frac{2}{7}$ y la probabilidad de que sea dañado por hongos es de $\frac{1}{4}$.)

BIBLIOGRAFIA

1. H. Cárdenas y otros: *Matemáticas Secundaria Abierta* Segundo Grado, Primera Parte. SEP, CNIE, CECSA.
2. Cárdenas y otros: *Matemáticas Secundaria Abierta* Segundo Grado, Segunda Parte. SEP, CNIE, CECSA.
3. H. Cárdenas y otros: *Matemáticas a Través de Problemas*. CECSA.
4. Kasner, Edward y Newman, James: *Matemáticas e Imaginación*. 1972 CECSA.
5. Richardson, Moses y Richardson, Leonard F.: *Fundamentos de Matemáticas* 1976 CECSA.
6. Nichols, Eugene D.: *Algebra Moderna Elemental*. 1968 CECSA.
7. Nichols, Heimer, Garland: *Algebra Moderna*. 1969 CECSA.
8. Fuller, Dordon: *Algebra Elemental*. 1977 CECSA.

ESTA IMPRESION DE 25,000 EJEMPLARES
SE TERMINO EN SEPTIEMBRE DE 1980,
EN TRANSFORMADORA INDUSTRIAL EDITORIAL, NAUCALPAN, EDO. DE MEXICO